Die Optimierung statischer volkswirtschaftlicher Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Material- und Ressourcenaufwandsfunktionen

Definition 1
Mit (1) möge folgender Spezialfall eines statischen volkswirtschaftlichen Problems mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen bezeichnet sein:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} x_i &= \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x_j) + y_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j) \cdot x_j + y_i, \qquad i = 1,\ 2, \ldots, n\,. \end{aligned}$$

Hier sind:

x_i	- die Gesamtproduktion des Zweiges $i = 1,\ 2, \ldots, n$,
y_i	- der Endverbrauch des Zweiges $i = 1,\ 2, \ldots, n$,
$b_{ij}(x_j)$	- der Materialaufwand des Zweiges i zur Herstellung der Gesamtproduktion x_j des Zweiges j $i, j = 1,\ 2, \ldots, n$,
$a_{ij}(x_j)$	- der spezifische Materialaufwand des Zweiges i zur Herstellung der Gesamtproduktion x_j des Zweiges j $i, j = 1,\ 2, \ldots, n$.

Die Funktionen $a_{ij}(x_j),\ i, j = 1,\ 2, \ldots, n$, mögen stetig differenzierbar sein. Es gelte ferner $a_{ij}^{'}(x_j) \geq 0,\ i, j = 1,\ 2, \ldots, n$.
Mit

$$(x_i) =: x \in R_+^n,$$
$$(y_i) =: y \in R_+^n,$$
$$(a_{ij}) =: A$$

lässt sich (1) in folgender Gestalt darstellen:

$$\text{(1')} \qquad x = A(x) \cdot x + y\,.$$

Definition 2
Als Problem (2) sei folgende Optimierungsaufgabe bezeichnet:

$$\text{(2)} \qquad \max\left\{ z = c^T \left(x - A(x) \cdot x \right) \mid x \in M \right\}$$
$$M := \left\{ x \in R_+^n \mid x - A(x) \cdot x \geq y,\ y \in R_+^n,\ \tilde{b}(x) \leq \tilde{b},\ \tilde{b} > 0 \right\}$$

Hier sind:

$c := (c_i) \in R^n;\ c_i \geq 0$ für mindestens ein $i = 1,\ 2, \ldots, n$,

$\tilde{b}(x)$ - die zur Herstellung des Gesamtproduktionsvektors x benötigte Primärressource,

$\tilde{b} > 0$ - die verfügbare Menge an der Primärressource.

Bemerkung 1

Die Primärressourcenfunktion $\tilde{b}(x)$ hat oft die Form:

(3) $$\tilde{b}(x) := \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j(x_j).$$

Bemerkung 2

Im Weiteren mögen folgende *Voraussetzungen* gelten:

V1(1) - Die Funktion $(E - A(x)) \cdot x =: f(x)$ ist für alle $x \in R_+^n$ stetig;

V1(2) - Das Problem (1') ist eindeutig global lösbar (d.h.: Für jedes beliebige, nach Wahl aber fixierte $y \in R_+^n$ existiert ein $x \in R_+^n$ derart, dass (1') erfüllt ist);

V1(3) - Sei

$$x := (E - A(x))^{-1} \cdot y$$

die Lösung von (1').
Dann sind die Elemente der Matrix $(E - A(x))^{-1}$ stetig für alle $x \in R_+^n$;

V1(4)

$$\left\langle \left(x^1 - A(x^1) \cdot x^1\right) \geq \left(x^2 - A(x^2) \cdot x^2\right), \forall x^1, x^2 \in R_+^n \right\rangle \quad \Rightarrow \quad x^1 \geq x^2;$$

V2 - Die Funktionen $\left((E - A(x)) \cdot x\right)_i =: f_i(x),\ \ i = 1,\ 2, \ldots, n$, sind für alle $x \in R_+^n$ konvex;

V3(1)
$$\left.\begin{array}{l} i)\ \tilde{b}(x) \geq 0 \\ ii)\ \tilde{b}(x) \text{ ist stetig} \end{array}\right\} \forall x \in R_+^n;$$

V3(2)
$$\left\langle x^1 \geq x^2;\ x^1 \neq x^2 \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \tilde{b}(x^1) \geq \tilde{b}(x^2);$$

V3(3)
$$\tilde{b}(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \geq \lambda\, \tilde{b}(x^1) + (1-\lambda)\, \tilde{b}(x^2), \quad \forall \lambda \in \left]0,\ 1\right[, \quad \forall x^1, x^2 \in R_+^n;$$

V3(4) $\forall k_1 = const. > 0 \; \exists k_2 = const. > 0: \quad \tilde{b}(\tilde{x}) \geq k_1$ für $\forall \left(\tilde{x} \in R_+^n \wedge \| \tilde{x} \| \geq k_2 \right)$

Satz 1
Gegeben sei das Problem (2). Dann gilt:

$$\tilde{b} \cdot ((E - A(x))^{-1} \cdot y) \leq \tilde{b} \quad \Leftrightarrow \quad M \neq \varnothing.$$

Beweis:

($\Rightarrow$):
Diese Implikation ist offensichtlich.

($\Leftarrow$):
Sei

(4) $$\tilde{b} \cdot ((E - A(x))^{-1} \cdot y) > \tilde{b}.$$

Dann folgt aus $x \in R_+^n$ und $(E - A(x)) \cdot x \geq y$:

$$x \geq (E - A(x))^{-1} \cdot y\,,$$

$$\tilde{b}(x) \geq \tilde{b}((E - A(x))^{-1} \cdot y)$$

$$> \tilde{b}. \qquad (\because \text{ V3(2)})$$

Dies widerspricht aber der Bedingung $\tilde{b}(x) \leq \tilde{b}$. Daher ist die Annahme falsch, und es gilt die Behauptung.

Satz 2
Gegeben sei das Problem (2). Dann gilt:

$$\tilde{b} \cdot ((E - A(x))^{-1} \cdot y) \leq \tilde{b} \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ ist kompakt.}$$

Beweis:
Die Beschränktheit von M folgt aus:

(5) $$\tilde{b}(\tilde{x}) \to +\infty \quad \text{für} \quad \| \tilde{x} \| \to +\infty \qquad (\because \text{ V3(4)})$$

Sei

$$\{\tilde{x}^{(\upsilon)}\}, \quad \upsilon \in N \in \{0\},$$

eine Folge in M mit $\lim\limits_{\upsilon \to +\infty} \tilde{x}^{(\upsilon)} = \tilde{x}$ in R_+^n.

Offensichtlich gilt dann $\tilde{x} \in R_+^n$. Wird mindestens eine der Bedingungen

$$(E - A(\tilde{x})) \cdot \tilde{x} \geq y\,,$$

$$\tilde{b}(\tilde{x}) \leq \tilde{b}$$

verletzt, so stellt dies einen Widerspruch zu V1(1) und V3(1) i dar.
Damit ist M abgeschlossen.

Satz 3
Gegeben sei das Problem (2). Dann gilt:

$$\left\langle \tilde{b} \cdot ((E - A(x))^{-1} \cdot y) \leq \tilde{b} \right\rangle \;\Rightarrow\; \left\langle \exists x^* \in M :\; c^T \left(\left(E - A\left(x^*\right)\right)\right) \cdot x^* = \sup_{x \in M}\; c^T \left((E - A(x) * x)\right) \right\rangle.$$

Beweis:
Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 1 und Satz 2

Satz 4
Gegeben sei das Problem (2). Dann gilt:

$$\left\langle \tilde{b}\left(\left(E - A\left(x\right)\right)^{-1} \cdot y\right) = \tilde{b} \right\rangle \;\Rightarrow\; \left\langle M = \left\{\left(E - A\left(x\right)\right)^{-1}\right\} \right\rangle.$$

Beweis:

$$\left\langle \tilde{b}\left(\left(E - A\left(x\right)\right)^{-1} \cdot y\right) = \tilde{b},\; x \in M \right\rangle \;\Rightarrow\; \left\langle x \geq \left(E - A\left(x\right)\right)^{-1} \cdot y \right\rangle.$$

Ist nun $x \neq \left(E - A\left(x\right)\right)^{-1} \cdot y$`, dann folgt aus V3(2)

$$\begin{aligned} \tilde{b}\left(x\right) &> \tilde{b}\left(\left(E - A\left(x\right)\right)^{-1}\right) \\ &= \tilde{b}\,, \end{aligned}$$

was zum Widerspruch führt.

(Fortsetzung folgt).