Verfahren zur Lösung von statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodellen mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen

Bemerkung 1
Der vorliegende Beitrag befasst sich mit einer Klasse von Verfahren zur Lösung des statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsproblems mit nicht linearen Materialaufwandsfunktionen:

(P) $x_i = b_i(x) + y_i, \quad i = 1, 2, ..., n,$

bzw.

(P‘) $x = b(x) + y.$

Hier sind:

x_i : die Gesamtproduktion des Zweiges $i = 1, 2, ..., n,$
$(x_i) =: x \in R_+^n,$
y_i : der Endverbrauch des Zweiges $i = 1, 2, ..., n,$
$(y_i) =: y \in R_+^n,$
$b_i(x)$: die Materialaufwandsfunktion des Zweiges $i = 1, 2, ..., n,$
$(b_i(x_i)) =: (b(x)) \in R_+^n.$

In [2] wurde das Verfahren der sukzessiven Approximation –I (VSA-1)

i. $x^{(0)} := y,$
ii. $x^{(\nu)} := b(x^{(\nu-1)}) + x, \quad \nu \in N,$

zur Lösung des Problems (P) vorgeschlagen und dessen wichtigsten Eigenschaften im Zusammenhang mit der Lösbarkeit des genannten Problems untersucht.
Im vorliegenden Beitrag werden einige weitere Eigenschaften dieses Verfahrens aus *numerischer* Sicht und insbesondere in Verbindung mit der *Kontraktionsbedingung* erörtert.
Eine Abbildung

$$f : D \subset R^n \to R^n$$

heißt dabei *kontrahierend* auf $D_0 \subset D,$ wenn

$$\exists \text{ ein } \lambda \in [0,\ 1[: \left\| f(x^1) - f(x^2) \right\| \le \lambda \cdot \left\| x^1 - x^2 \right\|,\ \forall x^1, x^2 \in D_0.$$

Die Zahl $\lambda \in R^1$ heißt dann *Kontraktionskonstante*.

<u>Satz 1:</u>
Gegeben sei die auf der abgeschlossenen Teilmenge $D_0 \subset D$ kontrahierende Abbildung

$$g : D \subset R^n \to R^n.$$

Es gelte ferner:

$$g(D_0) \subset D_0.$$

Dann hat g einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $x^* \in D_0$. Die Folge

(1) $$x^{(\nu)} := g(x^{(\nu-1)}), \quad \nu \in N,$$

konvergiert für jedes $x^0 \in D_0$ gegen x^*.

Beweis:

<u>Existenz</u>:
Wegen $g(D_0) \subset D_0$ ist die Folge (1) wohldefiniert und bleibt in D_0. Es gilt

$$\begin{aligned}\left\|x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}\right\| &= \left\|g(x^{(\nu)}) - g(x^{(\nu-1)})\right\| \\ &\le \lambda \cdot \left\|x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}\right\|.\end{aligned}$$

Damit folgt für $\nu \ge 1$:

$$\begin{aligned}\left\|x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}\right\| &\le \sum_{\mu=1}^{\nu} \left\|x^{(\nu+\mu)} - x^{(\nu+\mu-1)}\right\| \\ &\le (\lambda^{\nu-1} + \ldots + 1)\left\|x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}\right\| \\ &\le \frac{1}{1-\lambda}\left\|x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}\right\| \\ &\le \frac{\lambda^{\nu}}{1-\lambda}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|.\end{aligned}$$

$\{x^{(\nu)}\}, \ \nu \in N$, ist also eine Cauchy-Folge und hat daher wegen der Abgeschlossenheit von D_0 einen Grenzwert x^* in D_0.
Es bleibt zu zeigen, dass x^* Fixpunkt von g ist. Das folgt aber aus:

$$\begin{aligned}0 &\le \left\|x^* - g(x^*)\right\| \\ &\le \left\|x^* - x^{(\nu)}\right\| + \left\|x^{(\nu)} - g(x^*)\right\| \\ &= \left\|x^* - x^{(\nu)}\right\| + \left\|g(x^{(\nu-1)}) - g(x^*)\right\| \\ &\le \left\|x^* - x^{(\nu)}\right\| + \left\|x^{(\nu-1)} - x^*\right\|,\end{aligned}$$

weil die rechte Seite für $\nu \to \infty$ gegen Null strebt.

Eindeutigkeit:
Ist

$$g(x^1) = x^1;\ g(x^2) = x^2 \text{ mit } x^1 \neq x^2,$$

so folgt:

$$\begin{aligned} \|x^1 - x^2\| &= \|g(x^1) - g(x^2)\| \\ &\leq \lambda \cdot \|x^1 - x^2\| \\ &< \|x^1 - x^2\|. \end{aligned}$$

Dies ist aber ein Widerspruch. Es folgt also $x^1 = x^2$.

q.e.d.

Satz 2:
Gegeben sei

$$b : D \subset R^n \to R^n,$$
$$K_0 := \left\{ x \mid x \in R^n, \|x - x^0\| \leq \delta \right\} \subset D,\ x^0 \in D,\ \delta > 0,$$

und b auf K_0 kontrahierend mit $\lambda < 1$.
Ferner sei

$$f :\ id = b$$

und

$$K_1 := \left\{ y \mid y \in R^n, \|y - f(x^0)\| \leq (1 - \lambda) \cdot \delta \right\}.$$

Dann gibt es für alle $y \in K_1$ ein eindeutig bestimmtes $x^* \in K_0$ mit

$$f(x^*) = y,$$

und die Folge

$$x^{(\nu)} := b(x^{(\nu-1)}) + y, \quad \nu \in N,$$

konvergiert gegen x^*.

Beweis:
Für ein festes $y \in K_1$ sei die Abbildung $g : D \subset R^n \to R^n$ definiert durch:

$$g(x) := b(x) + y$$

$$= x - (f(x) - y),\ \forall x \in D.$$

Dann ist g trivialerweise auf K_0 kontrahierend.

Für alle $x \in K_0$ folgt dann:

$$\left\| g(x) - x^0 \right\| \le \left\| g(x) - g(x^0) \right\| + \left\| g(x^0) - x^0 \right\|$$

$$\le \lambda \left\| x - x^0 \right\| + \left\| f(x^0) - y \right\|$$

$$\le \lambda\delta + (1-\lambda)\delta$$

$$= \delta ,$$

d.h., es gilt $g(K_0) \subset K_0$. Nach Kontraktionssatz 1 hat g dann einen eindeutig bestimmten Fixpunkt x^* in K_0 :

$$x^* = g(x^*)$$

$$= b(x^*) + y,$$

also

$$f(x^*) = y,$$

und die Folge $x^{(\nu)} := b(x^{(\nu-1)}) + y, \;\; \nu \in N$, konvergiert gegen x^*.

<u>Bemerkung 2</u>:
Der Kontraktionssatz 1 hat die angenehme Eigenschaft, dass er eine leicht berechenbare Fehlerabschätzung liefer, die beim $\nu - ten$ Schritt des Iterationsverfahrens die Abweichung vom Grenzwert in Abhängigkeit vom letzten Schritt und der Kontraktionskonstanten λ ausdrückt.

<u>Satz 3</u>:
Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 gilt für die Folge (1) die Fehlerabschätzung

(2)
$$\left\| x^{(\nu)} - x^* \right\| \le \frac{\lambda}{1-\lambda} \left\| x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)} \right\|$$
$$\le \frac{\lambda^\nu}{1-\lambda} \left\| g(x^{(0)}) - x^{(0)} \right\|, \quad \nu \in N,$$

wobei $\lambda < 1$ die Kontraktionskonstante der Abbildung g ist

Beweis:
Es gilt für $\vartheta \ge 1$ (vgl. den Beweis von Satz 1):

$$\left\| x^{(\nu)} - x^* \right\| \le \left\| x^{(\nu)} - x^{(\nu+\vartheta)} \right\| + \left\| x^{(\nu+\vartheta)} - x^* \right\|$$

$$\le \frac{1}{1-\lambda} \cdot \left\| x^{(\nu+\vartheta)} - x^{(\nu)} \right\| + \left\| x^{(\nu+\vartheta)} - x^* \right\|.$$

Durch den Übergang $\vartheta \to \infty$ folgt daraus:

$$\left\| x^{(\nu)} - x^* \right\| \leq \frac{1}{1-\lambda} \left\| x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)} \right\|.$$

Jetzt folgen die behaupteten Ungleichungen unter Benutzung von

$$\begin{aligned} \left\| x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)} \right\| &= \left\| g(x^{(\nu)}) - g(x^{(\nu-1)}) \right\| \\ &\leq \lambda \cdot \left\| x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)} \right\|. \end{aligned}$$

q.e.d.

<u>Bemerkung 4</u>:
In den nachfolgenden Aussagen befassen wir uns mit einer Sensitivitätsanalyse des statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodells mit kontrahierender Materialaufwandsfunktion. Zunächst wenden wir uns der Fragestellung zu, was mit der Lösung passiert, wenn man vom Endverbrauchsvektor y auf einen anderen Endverbrauchsvektor $\bar{y}$ übergeht. Ist die Lösung stabil? Das heißt, änder sich der Vektor der Gesamtproduktion nur wenig, wenn der Vektor des Endverbrauchs wenig verändert wird?

<u>Satz 3</u>:
Sei $b: R^n \to R^n$ kontrahierend mit $\lambda < 1$ und $f: D \to R^n$ definiert durch $f := x - b(x)$ für alle $x \in D$.
Dann ist $f: D \to f(D)$ bijektiv, f^{-1} stetig, und es gilt:

$$\left\| f^{-1}(y) - f^{-1}(\bar{y}) \right\| \leq \frac{1}{1-\lambda} \left\| y - \bar{y} \right\|, \quad \forall y, \bar{y} \in f(D).$$

Beweis:
Für alle $y \in f(D)$ gilt $x = b(x) + y$ für ein $x \in D$, d.h., x ist Fixpunkt der kontrahierenden Abbildung $b + y$. Nach dem Beweis von Satz 1 ist dieser Fixpunkt eindeutig. Damit folgt die Injektivität von f, und $f: D \to f(D)$ bijektiv.

Weiter gilt für $x, \tilde{x} \in D$:

$$\begin{aligned} \left\| f(x) - f(\bar{x}) \right\| &= \left\| x - \bar{x} - (b(x) - b(\bar{x})) \right\| \\ &\geq \left\| x - \bar{x} \right\| - \left\| b(x) - b(\bar{x}) \right\| \\ &\geq \left\| x - \bar{x} \right\| - \lambda \left\| x - \bar{x} \right\| \\ &= (1-\lambda) \left\| x - \bar{x} \right\|. \end{aligned}$$

Seien $y, \bar{y} \in f(D)$ und $x, \bar{x} \in D$ mit $f(x) = y$ und $f(\bar{x}) = \bar{y}$, dann folgt:

$$\begin{aligned}\left\| f^{-1}(y) - f^{-1}(\bar{y}) \right\| &= \left\| x - \bar{x} \right\| \\ &\leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \left\| f(x) - f(\bar{x}) \right\| \\ &\leq \frac{1}{1-\lambda} \left\| y - \bar{y} \right\|.\end{aligned}$$

Dies ist die behauptete Abschätzung, und aus ihr folgt die Stetigkeit von f^{-1}.

q.e.d.

Bemerkung 5:
Aus der Stetigkeit von f^{-1} folgt, dass sich die Lösung bei kleinen Änderungen des Endverbrauchs auch nur wenig ändert.

Bemerkung 6:
Man kann weiter fragen, was geschieht, wenn man von der kontrahierenden Aufwandsfunktion b zu der Aufwandsfunktion $\bar{b}$ übergeht, oder noch allgemeiner von der Iterationsfunktion $g(x) = b(x) + y$ zu $\bar{g}(x) = \bar{b}(x) + \bar{y}$. Die Abbildung $\bar{g}$ braucht hierbei nicht notwendig kontrahierend zu sein, also auch keinen Fixpunkt zu besitzen. Der folgende Satz beschreibt das Verfahren der Folgenglieder:

Satz 4:
Sei $D \subset R_+^n$ und $g: D \rightarrow D$ eine kontrahierende Abbildung mit der Kontraktionskonstanten $\lambda < 1$.

Sei $\bar{g}: D \rightarrow D$, und es gelte für ein $\varepsilon > 0$ und alle $x \in D$:

$$\left\| g(x) - \bar{g}(x) \right\| < \varepsilon.$$

Seien

$$x^{+(0)}, x^{++(0)} \in D,\ x^{+(0)} = x^{++(0)},\ x^{+(\nu)} = g(x^{+(\nu-1)}) \text{ und } x^{++(\nu)} = \bar{g}(x^{++(\nu-1)}) \text{ für } \nu \in N.$$

Dann gilt für alle $\nu \in N$:

$$\left\| x^{+(\nu)} - x^{++(\nu)}) \right\| \leq \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{\nu-1} \lambda^j.$$

Beweis:
Wir beweisen die Abschätzung durch Induktion über ν :

Der Fall $\nu = 1$ ist klar.
Die Abschätzung möge für ν richtig sein. Dann folgt:

$$\left\| x^{+(\nu+1)} - x^{++(\nu+1)}) \right\| \leq \left\| g(x^{+(\nu)}) - g(x^{++(\nu)})) \right\| + \left\| g(x^{++(\nu)}) - g(x^{+(\nu)}) \right\|$$

$$\leq \lambda \left\| x^{+(\nu)} - x^{++(\nu)}) \right\| + \varepsilon$$

$$= \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{\nu} \lambda^{j}.$$

q.e.d.

<u>Bemerkung 7</u>:

Falls $\bar{g}$ einen Fixpunkt hat (z.B. falls kontrahierend ist) können wir den Abstand der Lösung mit folgendem Satz abschätzen:

<u>Satz 5</u>:

Sei $D \in R_{+}^{n}$ und $g : D \to D$ kontrahierend mit $\lambda < 1$. Sei $\bar{g} : D \to D$ und gelte für ein $\varepsilon > 0$ und alle $x \in D$:

$$\left\| g(x) - \bar{g}(x) \right\| \leq \varepsilon.$$

Sei $\bar{x}*$ Fixpunkt von g und $\bar{\bar{x}}*$ Fixpunkt von $\bar{\bar{g}}$. Dann gilt:

$$\left\| \bar{x}* - \bar{\bar{x}}* \right\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\lambda}.$$

Beweis:
Trivialerweise gilt für alle $\nu \in N$:

$$\bar{x}* = g^{(\nu)}(\bar{x}*)$$

und

$$\bar{\bar{x}}* = g^{(\nu)}(\bar{\bar{x}}*).$$

Damit folgt wegen der Kontraktionseigenschaft von g und Satz 4 für alle $\nu \in N$:

$$\left\| \bar{x}* - \bar{\bar{x}}* \right\| \leq \left\| g^{(\nu)}(\bar{x}*) - g^{(\nu)}(\bar{\bar{x}}*) \right\| + \left\| g^{(\nu)}(\bar{\bar{x}}*) - \bar{g}^{(\nu)}(\bar{\bar{x}}*) \right\|$$

$$\leq \lambda^{\nu} \left\| \bar{x}* - \bar{\bar{x}}* \right\| + \varepsilon \sum_{j=0}^{\nu-1} \lambda^{j} \ .$$

Beim Grenzübergang $\nu \to \infty$ geht der erste Term gegen Null und der zweite gegen $\frac{\varepsilon}{1-\lambda}$.

q.e.d.

Bemerkung 8:

Wenn wir mit der Abbildung $\bar{g}$ statt mit g iterieren, so benötigen wir eine Abschätzung für den Fehler, den wir dabei machen. Dies liefert der folgende Satz:

Satz 6:

Sei $D \subset R_+^n$ und $g : D \to D$ kontrahierend mit $\lambda < 1$. Sei ferner $\bar{g} : D \to D$ und gelte für ein $\varepsilon > 0$ und alle $x \in D$:

$$\left\| g(x) - \bar{g}(x) \right\| \le \varepsilon.$$

Sei x^* Fixpunkt von g, $\bar{\bar{x}}^{(\nu)} = \bar{g}(\bar{\bar{x}}^{(\nu-1)})$, $\nu \in N$, das Iterationsverfahren von $\bar{g}$. Dann gilt:

$$\left\| x^* - \bar{\bar{x}}^{(\nu)} \right\| \le \frac{1}{1-\lambda} \cdot \left(\varepsilon + \lambda^\nu \left\| \bar{\bar{x}}^{(0)} - \bar{g}(\bar{\bar{x}}^{(0)}) \right\| \right), \quad \nu \in N.$$

Beweis:

Sei $\bar{x}^{(0)} = \bar{\bar{x}}^{(0)}$ und $x^{(\nu)} = g(x^{(\nu-1)})$ für $\nu \in N$. Dann folgt wegen Satz 3 und Satz 5 für $\nu \in N$:

$$\left\| x^* - \bar{\bar{x}}^{(\nu)} \right\| \le \left\| x^* - \bar{x}^{(\nu)} \right\| + \left\| \bar{x}^{(\nu)} - \bar{\bar{x}}^{(\nu)} \right\|$$

$$\le \frac{\lambda^\nu}{1-\lambda} \left\| \bar{\bar{x}}^{(0)} - g\left(\bar{\bar{x}}^{(0)} \right) \right\| + \varepsilon \sum_{j=0}^{\nu-1} \lambda^j$$

$$\le \frac{\lambda^\nu}{1-\lambda} \left\| \bar{\bar{x}}^{(0)} - g\left(\bar{\bar{x}}^{(0)} \right) \right\| + \frac{\lambda^\nu}{1-\lambda} \left\| \bar{g}\left(\bar{\bar{x}}^{(0)} \right) - g\left(\bar{\bar{x}}^{(0)} \right) \right\| + \varepsilon \sum_{j=0}^{\nu-1} \lambda^j$$

$$\le \frac{\lambda^\nu}{1-\lambda} \left\| \bar{\bar{x}}^{(0)} - g\left(\bar{\bar{x}}^{(0)} \right) \right\| + \frac{\lambda^\nu}{1-\lambda} \cdot \varepsilon + \varepsilon \sum_{j=0}^{\nu-1} \lambda^j \, .$$

$$\le \frac{\lambda^\nu}{1-\lambda} \left\| \bar{\bar{x}}^{(0)} - \bar{g}\left(\bar{\bar{x}}^{(0)} \right) \right\| + \varepsilon \left(\frac{\lambda^\nu}{1-\lambda} + \frac{1-\lambda^\nu}{1-\lambda} \right)$$

$$\le \frac{\lambda^\nu}{1-\lambda} \left\| \bar{\bar{x}}^{(0)} - \bar{g}\left(\bar{\bar{x}}^{(0)} \right) \right\| + \varepsilon \frac{1}{1-\lambda}$$

$$\le \frac{1}{1-\lambda} \cdot \left(\varepsilon + \lambda^\nu \left\| \bar{\bar{x}}^{(0)} - \bar{g}(\bar{\bar{x}}^{(0)}) \right\| \right), \quad \nu \in N$$

.q.e.d.

Bemerkung 9:
Der nächste Satz gibt Auskunft über die Lösungsmöglichkeit eines statischen Verflechtungsmodells mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen, dessen Iterationsfunktion $g = b + y$ einer kontrahierenden Abbildung „ähnlich“ ist:

Satz 7:
Sei $D \subset R^n$ abgeschlossen, $g : D \to R^n$ eine Abbildung mit $g(D) \subset D$. Sei ferner $h : D \to D$ ein Homomorphismus, so dass die Abbildung $h^{-1} \circ g \circ h$ kontrahierend ist.
Dann hat g genau einen Fixpunkt x^* und das Iterationsverfahren

$$x^{(\nu+1)} := g(x^{(\nu)}), \quad \nu \in R \cup \{0\},$$

konvergiert für ein beliebiges $x^{(0)} \in D$ gegen x^*.

Beweis:
Die Abbildung $h^{-1} \circ g \circ h$ ist kontrahierend und bildet D in sich ab, besitzt also nach dem Kontraktionssatz 1 einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $\bar{x}^*$. Aus $h^{-1} \circ g \circ h(\bar{x}^*) = \bar{x}^*$ folgt

$g(h(\bar{x}^*)) = h(\bar{x}^*)$.

$h(\bar{x}^*)$ ist also der eindeutig bestimmter Fixpunkt von g. Das Iterationsverfahren

$$\bar{x}^{(\nu+1)} := h^{-1} \circ g \circ h(\bar{x}^{(\nu)}), \quad \nu \in R \cup \{0\},$$

konvergiert also für alle $\bar{x}^{(0)} \in D$ gegen $\bar{x}^*$. Weil h Homomorphismus ist, konvergiert auch dann das Verfahren

$$\begin{aligned} x^{(\nu+1)} &:= h(\bar{x}^{(\nu+1)}) \\ &= g(h(\bar{x}^{(\nu)})) \\ &= g(x^{(\nu)}) \end{aligned}$$

für alle $x^{(0)} = h(\bar{x}^{(0)}) \in D$ gegen $x^* := h(\bar{x}^*)$.

q.e.d.

Bemerkung 10:
Die Voraussetzungen des Satzes 7 sind speziell erfüllt, wenn der Homomorphismus h durch eine invertierbare, nichtnegative Diagonalmatrix gegeben ist. Man kann den Übergang von g zu $h^{-1} \circ g \circ h$ als Wahl neuer Maßeinheiten für die Produkte deuten.

Literatur:

[1] Siassi, Jilla:
Statische LEONTIEF-Modelle mit nichtlinearen Lieferbeziehungen.
Vortrag auf der VI. Wissenschaftlichen Tagung „Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie“, Rostock, 21.-25.01.1980.

[2] Siassi, J.:
Statische volkswirtschaftliche Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen.
In: Ausgewählte Probleme der Anwendung mathematischer Methoden in der Ökonomie. Autorenkollektiv des Lehrstuhls für Ökonometrie an der Hochschule für Ökonomie Prag und des Wissenschaftsbereichs Operationsforschung der Hochschule für Ökonomie „Bruno Leuschner“ Berlin. Reihe Acta Oeconomica Pragensia der HfÖ Prag, 1987.