VII

Optimierung des Input-Output-Modells

D. 7. 1.
Mit (P. 7. 1.) möge folgender Spezialfall von (P. 2. 1.) bezeichnet sein, wobei die Aufwandsfunktion $b: R_+^1 \to R_+^n$ die Bedingungen (B. 3.) und (B. 4.) erfüllt:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x_j) + y_i$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j) \cdot x_j + y_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad \text{(P. 7. 1.)}$$

Hier sind die Funktionen $a_{ij}, \ i, j = 1, 2, ..., n,$ stetig differenzierbar, und es gilt $a_{ij} \geq 0, \ i, j = 1, 2, ..., n.$

B. 7. 1.
(P. 7. 1.) lässt sich formal in der Gestalt

$$x = A(x)x + y \qquad \text{(7. 1.)}$$

darstelle [vgl. S. 2. 9.], wobei die in der Definition D. 7. 1. festgelegten Voraussetzungen vorliegen müssen.

D. 7. 2.
Als Problem (OP. 7. 1.) sei folgende *Optimierungsaufgabe* bezeichnet:

$$Max\{z = c^T(x - A(x)x) \mid x \in M\} \qquad \text{(OP. 7. 1.)}$$

$$M := \left\{ x \in R_+^n \mid x - A(x)x \geq y, \ y \in R_+^n, \ \tilde{b}(x) \leq \tilde{b} \ \ \tilde{b} > 0 \right\}.$$

Hier sind:

$c := (c_i) \in R^n, \ c_i \geq 0$ für mindestend ein $i = 1, 2, ..., n,$

$\tilde{b}(x)$: die zur Realisierung des Gesamtproduktionsvektors x benötigte Primärressource,

$\tilde{b} > 0$: die verfügbare Primärressourcenmenge.

B. 7. 2.
Die Primärressourcenfunktion hat oft die Form:

$$\tilde{b}(x) := \sum_{j=1}^{n} b_j(x_j)\,. \tag{7. 2.}$$

<u>B. 7. 3.</u>
Im Weiteren mögen folgende <u>Voraussetzungen</u> gelten:

V1(1) Die Funktion $(E - A(x))x =: f(x)$ ist für alle $x \in R_+^n$ stetig;

V1(2) Das Problem (P. 7. 1.) (bzw. (7. 1.)) ist eindeutig global lösbar;

V1(3) Sei

$$x := (E - A(x))^{-1} y$$

die Lösung von (7. 1.). Dann sind die Elemente der Matrix $(E - A(x))^{-1}$ stetig für alle $x \in R_+^n$;

V1(4)

$$\left\langle x^1 - A(x^1)x^1 \geq x^2 - A(x^2)x^2,\ \forall x^1, x^2 \in R_+^n \right\rangle \quad \Rightarrow \quad x^1 \geq x^2.$$

V2 Die Funktionen $\left[(E - A(x)x)\right]_i =: f_i(x),\ i = 1, 2, ..., n,$ sind für alle $x \in R_+^n$ konvex;

V3(1) $\left.\begin{array}{l} i)\ \tilde{b}(x) \geq 0 \\ ii)\ \tilde{b}(x) \text{ ist stetig} \end{array}\right\} \forall x \in R_+^n;$

V3(2) $\left\langle x^1 \geq x^2;\ x^1 \neq x^2 \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \tilde{b}(x^1) > \tilde{b}(x^2);$

V3(3) $\tilde{b}(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \geq \lambda b(x^1) + (1-\lambda)\tilde{b}(x^2)\,, \quad \forall \lambda \in \left]0,\ 1\right[;\ \ \forall x^1, x^2 \in R_+^n;$

V3(4) $\forall k_1 = const > 0\ \exists k_2 = const > 0:\ \tilde{b}(\tilde{x}) \geq k_1$ für $\forall(\tilde{x} \in R_+^n \wedge \|\tilde{x}\| \geq k_2).$

<u>S. 7. 1.</u>
Gegeben sei das Problem (OP. 7. 1.). Dann gilt:

$$\tilde{b}((E - A(x))^{-1} y) \leq \tilde{b} \quad \Leftrightarrow \quad M \neq \varnothing\,.$$

Beweis:
$(\Rightarrow)$
Diese Implikation ist offensichtlich.

($\Leftarrow$)
Sei

$$\tilde{b}((E-A(x))^{-1}y) > \tilde{b}\,. \tag{7. 3.}$$

Dann folgt aus $x \in R_+^n$ und $(E-A(x))x \geq y$:

$$x \geq (E-A(x))^{-1}y,$$

$$\tilde{b}(x) \geq \tilde{b}((E-A(x))^{-1}y)$$

$$\geq \tilde{b}. \qquad (\because\ (\text{V3}(2)))$$

Dies widerspricht aber der Behauptung $\tilde{b}(x) \leq \tilde{b}$. Daher ist die Annahme falsch, und es gilt die Behauptung.

q.e.d.

S. 7. 2.
Gegeben sei das Problem (OP. 6. 1.). Dann gilt:

$$\tilde{b}((E-A(x))^{-1}y) \leq \tilde{b} \quad \Rightarrow \quad M \text{ ist kompakt.}$$

Beweis:
Die Beschränktheit von M folgt aus:

$$\tilde{b}(\tilde{x}) \to \infty \quad \text{für } \|\tilde{x}\| \to \infty. \qquad (\because\ (\text{V3}(4))) \tag{7. 4.}$$

Sei nun $\{\tilde{x}^{(\nu)}\}$, $\nu \in N \cup \{0\}$, eine Folge in M mit $\lim_{\nu\to\infty} \tilde{x}^{(\nu)} = \tilde{x}$ in R_+^n. Offensichtlich gilt dann $\tilde{x} \in R_+^n$. Wird mindestens eine der Ungleichungen

$$(E-A(\tilde{x}))\tilde{x} \geq y,$$
$$\tilde{b}(\tilde{x}) \leq \tilde{b}$$

verletzt, so stellt dies einen Widerspruch zu V1(1) und V3(1) dar. Damit ist M abgeschlossen.

q.e.d.

S. 7. 3.
Gegeben sei das Problem (OP. 6. 1.). Dann gilt:

$$\left\langle \tilde{b}((E-A(x))^{-1}y)\tilde{b} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \exists x^* \in M : c^T((E-A(x^*))x^* = \sup_{x\in M} c^T((E-A(x)x) \right\rangle.$$

Beweis:
Die Behauptung folgt unmittelbar aus S. 7. 1. und S. 7. 2.

q.e.d.

S. 7. 4.
Gegeben sei das Problem (OP. 6. 1.). dann gilt:

$$\left\langle \tilde{b}((E-A(x))^{-1}y) = \tilde{b} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \left\langle M = \left\{ (E-A(x))^{-1}y \right\} \right\rangle .$$

Beweis:

$$\left\langle \tilde{b}((E-A(x))^{-1}y) = \tilde{b}, \quad x \in M \right\rangle \quad \Rightarrow \quad x \geq (E-A(x))^{-1}y.$$

ist nun $x \neq (E-A(x))^{-1}y$, dann folgt wegen V3(2):

$$\tilde{b}(x) > \tilde{b}((E-A(x))^{-1}y)$$
$$= \tilde{b},$$

was zum Widerspruch führt.

q.e.d.

S. 7. 5.
Gegeben sei das Problem (OP. 7. 1.). Sei

$$\tilde{b}((E-A(x))^{-1}y) < \tilde{b}.$$

dann existiert für jedes $i = 1, 2, ..., n$ ein eindeutiges $\beta_i > 0$, derart dass

$$\tilde{b}((E-A(x))^{-1}(y+\beta_i e^i)) = \tilde{b}$$

gilt. Hier ist e^i, $i = 1, 2, ..., n,$ der Einheitsvektor mit der Komponente Eins an der $i-$ten Stelle.

Beweis:
Es gilt:

$$\tilde{b}((E-A(x))^{-1}y) - \tilde{b} < 0,$$
$$\left. \begin{array}{l} (E-A(x))^{-1}(y+\alpha_i e^i) \geq (E-A(x))^{-1}(y+\beta_i e^i) \\ (E-A(x))^{-1}(y+\alpha_i e^i) \neq (E-A(x))^{-1}(y+\beta_i e^i) \end{array} \right\}, \ \forall \alpha_i, \beta_i \geq 0.$$

Die Komponenten $(E-A(x))^{-1}(y+\beta_i e^i)$ sind in β_i stetig, und es gilt

$$\| (E-A(x))^{-1}(y+\beta_i e^i) \| \ \to \infty, \quad \text{wenn } \beta_i \to \infty.$$

Aus V3(2) und ((6. 4.) folgt nun, dass die Funktion $\tilde{b}((E-A(x))^{-1}(y+\beta_i e^i)),\ \beta_i \geq 0,$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion in β_i ist, derart dass

$$\tilde{b}((E-A(x))^{-1}(y+\beta_i e^i)) \to \infty, \quad \text{wenn } \beta_i \to \infty.$$

Damit existiert ein eindeutiges β_i, derart dass

$$\tilde{b}((E-A(x))^{-1}(y+\beta_i e^i)) = \tilde{b}$$

gilt.

q.e.d.

B. 7. 4.

Die bisherigen Ergebnisse dieses Kapitels lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Ausgehend von einem Spezialfall von (P. 2. 1.), wobei die Aufwandsfunktion jedes Sektors nur von der Gesamtproduktion dieses Sektors abhängig und dessen Funktion des direkten spezifischen Aufwands stetig differenzierbar und nichtnegativ ist (bezeichnet als (P. 7. 1)), wird ein nichtlineares statisches volkswirtschaftliches Optimierungsmodell des Verflechtungstyps untersucht. Maximiert wird die nach den einzelnen Sektoren gewogene Endnachfrage der Volkswirtschaft unter der Bedingung, dass

1. jeder Sektor mindestens dessen Endnachfrage sichert;
2. die verfügbare Menge der einzig vorhandenen Primärressource beschränkt ist;

Die Untersuchung erfolgt u. a. unter folgenden Voraussetzungen:

- Die Endnachfragefunktion aller Sektoren bezüglich der Gesamtproduktion ist stetig, monoton wachsend und konvex.
- Das der Optimierungsaufgabe (OP. 7. 1.) zugrunde liegende statische volkswirtschaftliche Verflechtungsmodell mit nichtlinearen Aufwandsfunktionen (P. 7. 1.) ist eindeutig global lösbar; die Elemente der entsprechenden Inversen sind bezüglich der Gesamtproduktion stetig;
- Die Primärressourcenfunktion nimmt nur nichtnegative Werte an und ist stetig, streng monoton wachsen und konvex.

Unter den angeführten Bedingungen werden dann folgende Aussagen bewiesen:

1) Das Optimierungsproblem (OP. 7. 1.) hat genau dann eine zulässige Lösung, wenn bei der Realisierung der Lösung von (P. 7. 1.) die Primärressourcenmenge höchstens ausgeschöpft wird.
2) Wenn bei der Realisierung der Lösung von (P. 7. 1.) die Primärressource höchstens ausgeschöpft wird, dann hat das Optimierungsproblem (OP. 7. 1.) Optimallösungen [Vgl . S. 7. 2].
3) Wenn bei der Realisierung der Lösung von (P. 7. 1.) die Primärressource voll ausgeschöpft wird, dann hat das Optimierungsproblem (OP. 7. 1.) genau eine zulässige Lösung, die gleichzeitig die Optimallösung dieses Problems darstellt [Vgl. S. 7. 4)].
4) Wenn bei der Realisierung der Lösung von (P. 7. 1.) die Primärressource nicht voll ausgeschöpft wird, so lässt sich dies auch durch die Erhöhung der Endnachfrage in

einem einzigen Sektor erreichen. Diese Erhöhung kann jedoch nur auf *eine* Weise erfolgen [Vgl. S. 7. 5.].

B. 7. 5.
Sei

$$\tilde{b}((E-A(x))^{-1}y) < \tilde{b}\,,$$

$$N := \{\delta \in R_+^n \mid \tilde{b}((E-A(x))^{-1}(y+\delta)) \le \tilde{b}\}\,.$$

Für jede Lösung x^* des Problems (OP. 6. 1.) gilt

$$(E-A(x^*))x^* = y+\delta, \quad \delta \in R_+^n.$$

Damit x^* eine Lösung des Problems (OP. 6. 1.), wenn $(E-A(x^*))x^* = y+\delta$ gilt und δ eine Lösung des Problems

$$Max\{c^T(y+\delta) \mid \delta \in N\} \qquad \text{(OP. 7. 2.)}$$

ist.

S. 7. 6.
Es gilt:

1.

$$T := \{\delta \in R_+^n \mid \tilde{b}((E-A(x))^{-1}(y+\delta)) > \tilde{b}\} \ne \emptyset.$$

2.
T ist konvex.

Beweis:
1.
Vgl. den Beweis von S. 7. 5.

2.
Sei

$$u^1, u^2 \in R_+^n :$$

$$\tilde{b}((E-A(x))^{-1}(y+u^1)) > \tilde{b}$$

$$\tilde{b}((E-A(x))^{-1}(y+u^2)) > \tilde{b}\,.$$

Ferner sei

$$x = (E-A(x))^{-1}(y+\lambda u^1 + (1-\lambda)u^2), \quad \lambda \in \,]0,\ 1[\,,$$

$$\left.\begin{aligned}(E-A(x^1))x^1 &= y+u^1\\ (E-A(x^2))x^2 &= y+u^2\end{aligned}\right\}, \quad x^1, x^2 \in R_+^n.$$

Man erhält:

$$(E - A(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2))(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda(E - A(x^1)) + (1-\lambda)(E - A(x^2))x^2 \qquad (\because \text{(V2)})$$

$$= y + \lambda u^1 + (1-\lambda)u^2$$

$$= (E - A(x))x.$$

Es gilt also

$$(E - A(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2))(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq (E - A(x))x$$

und daher

$$x \geq \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2.$$

Es gilt ferner

$$\tilde{b}(x) \geq \tilde{b}(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \qquad (\because \text{(V3(2)),(V3(3))})$$

$$\geq \lambda \tilde{b}(x^1) + (1-\lambda)\tilde{b}(x^2)$$
$$> \tilde{b},$$

womit die Konvexität von T nachgewiesen ist.

q.e.d.

<u>S. 7. 7.</u>
Es gilt

$$\{\beta_i e^i \mid i = 1, 2, ..., n\} \subset N \subseteq \left\{\delta \in R_+^n \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\beta_i} \leq 1\right\}.$$

Beweis:
Die erste Inklusion ist offensichtlich [Vgl. S. 7. 5.].
Sei nun

$$\vartheta \in \left]1, \infty\right[$$

mit

$$\lambda \in R_+^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\beta_i} = \vartheta.$$

Dann gilt:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \vartheta \beta_i e^i; \quad \eta_i \geq 0, \; i = 1, 2, ..., n; \quad \sum_{i=1}^{n} \eta_i = 1.$$

Man erhält ferner

$$\left\{ \nu\beta_o e^i \mid i = 1,2,...,n \right\} \subset T \,. \qquad (\because \text{S. 7. 5.})$$

Aus der Konvexität von T folgt $\lambda \in T$. Für jedes $\delta \in N$ gilt also

$$\delta \in \left\{ \delta \in R_+^n \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\beta_i} \leq 1 \right\}.$$

q.e.d.

S. 7. 8.
Gegeben sei das Problem (OP. 7. 1.). Sei

$$\tilde{b}(E - A(x))^{-1} < \tilde{b}.$$

Dann stellt

$$x = (E - A(x))^{-1}(y + \beta_j e^j)$$

mit

$$c^T(y + \beta_j e^j) \geq c^T(y + \beta_i e^i), \quad i = 1,2,...,n,$$

eine Lösung des Problems (OP. 7. 1.) dar.

Beweis:
Die Behauptung folgt unmittelbar aus S. 7. 7. unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Menge

$$\tilde{N} := \left\{ \delta \in R_+^n \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\beta_i} \leq 1 \right\}$$

eine konvexe Polytope ist mit den Exremalpunkten $0,\ \beta_1 e^1, \beta_2 e^2, ..., \beta_n e^n$, und das die konvexe Funktion $c^T(y + \cdot)$ ihr Maximum in einem Extremalpunkt von $\tilde{N}$ annimmt.

q.e.d.

B. 7. 6.
In B. 7. 5. haben wir ein Maximierungsproblem (OP. 7. 2.) formuliert, in dessen linearer Zielfunktion eine zusätzlich Endnachfrage $\delta \in R_+^n$ als Variable vorkommt. Die einzige Beschränkung dieses Problems besteht darin, dass bei der Realisierung dieser zusätzlichen Endnachfrage die verfügbare Menge an der Primärressource höchstens erschöpft wird.
Es stellt sich nun u. a. folgender Zusammenhang zwischen den beiden Optimierungsproblemen (OP. 7. 1.) und (OP. 7. 2.) heraus:

$x*$ ist eine Optimallösung von (OP. 7. 1.), wenn

1. die Verflechtungsbedingungen in (OP. 7. 1.) als Gleichung erfüllt werden;
2. δ eine Optimallösung des Problems (OP. 7. 2.) ist.

B. 7. 7.
Betrachtet sei das Problem

$$\max\left\{ p^T (E - A(x)x \mid x \in Z\right\} \qquad \text{(OP. 7. 3.)}$$

mit

$$Z := \left\{ x \in R_+^n \mid (E - A(x))x \geq y,\ \tilde{b}(x) \leq \tilde{b},\ x \leq \tilde{x} \right\},$$

wobei nun lediglich die Voraussetzung V1 gelten möge.
Hier sind:

$\tilde{b} : R_+^m \to R_+^n :$ stetig mit der Eigenschaft:

$$\left\langle x^1 \geq x^2, x^1, x^2 \in R_+^n \right\rangle \;\Rightarrow\; \tilde{b}(x^1) \geq \tilde{b}(x^2),$$

$$p := (p_i) \in R_+^n, \qquad \tilde{b} := (\tilde{b}_i) \in R_+^n, \qquad x := (x_i) \in R_+^n.$$

Es lässt sich leicht nachweisen:

1. $Z \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; \tilde{b}((E - A(x))^{-1} y) \leq \tilde{b} \;\wedge\; (E - A(x))^{-1} y \leq \tilde{x}.$
2. Unter der Voraussetzung, dass

   i) $Z \neq \emptyset$,
   ii) die Funktionen $\left[(E - A(x))x\right]_i := f_i(x)$ sind für alle $x \in R_+^n$ konkav.
   (Zum Beispiel, wenn in

   $$\left[(E - A(x))x\right]_i := x_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x_j),\ i = 1, 2, ..., n,$$

   die Funktionen $b_{ij}(x_j),\ j = 1, 2, ..., n,$ für alle $x_j \in R_+^1,\ j = 1, 2, ..., n,$ konvex sind.)

   iii) $\tilde{b}_i(x),\ i = 1, 2, ..., m,$ sind für alle $x \in R_+^n$ konvex
   (Zum Beispiel, wenn (für $m = 1$) in $\tilde{b}(x) := \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j(x_j)$ die
   Funktionen $\tilde{b}_j(x_j),\ j = 1, 2, ..., n,$ für alle $x_j \in R_+^1,\ j = 1, 2, ..., n,$ konvex sind.),

   ist Z kompakt und konvex. Damit existiert ein Punkt in R_+^n, in dem die Zielfunktion in (OP. 7. 3.) bezüglich der Menge Z ein absolutes Maximum annimmt. Jedes relative Maximum dieses Problems ist dabei ein absolutes Maximum.

B. 7. 8.
In B. 7. 7. haben wir ein Optimierungsproblem (OP. 7. 3.) betrachtet, bei dem die nach den einzelnen Sektoren gewogene Endnachfrage der Volkswirtschaft in Abhängigkeit von deren Gesamtproduktion maximiert wird. Werden alle Gewichte gleich Eins gewählt, so handelt es sich um die Maximierung des Gesamtproduktes.
Die Beschränkungen des Problems lauten:

1. Die Gesamtproduktion muss mindestens die Endnachfrage sichern;
2. Die Primärressourcen (im Allgemeinen mehrere) werden höchstens ausgeschöpft.
3. Für die Gesamtproduktion gilt eine Höchstschranke.

Es sei dabei bemerkt, dass hier von den in B. 7. 3. gemachten Voraussetzungen nur die erste außer der Konvexität gelten soll. Außerdem werden die Primärressourcenfunktionen als stetig und monoton wachsend vorausgesetzt.
Für das Optimierungsproblem (OP. 7. 3.) gilt nun folgende Aussage:
Das Problem (OP. 7. 3.) hat genau dann eine zulässige Lösung, wenn die Primärressourcen höchstens ausgeschöpft werden.

Unter den zusätzlichen Bedingungen, dass

4. eine zulässige Lösung gefunden werden kann,
5. die Endnachfragefunktionen bezüglich der Gesamtproduktion konkav sind,
6. die Primärressourcenfunktionen konvex sind,

kann man beweisen, dass in (OP. 7. 3.) jedes relative Maximum gleichzeitig ein absolutes Maximum ist.

(Letzte Aktualisierung: 27.08.08)