VI

Einige Elastizitätsaussagen

B. 6. 1.
Im Kapitel III [vgl. B. 3. 2.] haben wir uns bereits mit einer Sensitivitätsanalyse des statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodells mit kontrahierender Aufwandsfunktion befasst. Wir haben die Frage gestellt und beantwortet, was mit der Lösung des genannten Problems geschieht, wenn man von einem Endnachfragevektor y auf einen anderen Endnachfragevektor $\tilde{y}$ übergeht. Damit verbunden wurde die Frage der Stabilität der Lösung diskutiert. Es wurde festgestellt, dass wegen der Stetigkeit von f^{-1} sich die Lösung bei kleinen Änderungen der Endnachfrage ebenfalls wenig ändert [vgl. S. 3. 3.].
In diesem Kapitel werden einige Elastizitätsaussagen zu statischen Verflechtungsmodellen mit nichtlinearen Aufwandsfunktionen hergeleitet.

S. 6. 1.
Gegeben sei das Problem (P. 2. 1.) (bzw. (P. 2. 1'.). Ferner möge folgendes gelten:

1.

$$L \subset R^n: \ \forall\left(x \in L,\ x > 0\right) \ \Rightarrow \ \left\langle L \supset \text{ eine } U(x) \wedge L \supset \text{ eine } U(\alpha x),\ \forall \alpha \in \left]0,\ 1\right[\right\rangle .$$

2.

$$b_i: \ M_+^0 \to R_+^n, \ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

mit

$$M_+^0 := \left\{x \in M^0 \mid x \in R_+^n\right\},$$

$$M^0 := \left\{x \in R^n \mid \ \|x\| < \delta,\ \delta > 0: \text{ hinreichend groß}\right\}$$

und

$$\left\langle x^1 . x^2 \in M_+^0: \ x^2 \geq x^1 \right\rangle \ \Rightarrow \ b_i(x^2) \geq b_i(x^1),\ \ i = 1, 2, \ldots, n .$$

3.
Das Problem (P. 2. 1.) (bzw. (P. 2. 1'.) ist streng lokal (schwach) lösbar [vgl. B. 2. 2.].

4.
Die Funktion $x - b(x) =: f(x)$ ist stetig in einer Umgebung von $\tilde{x}$ und ist ein lokaler Homomorphismus in $\tilde{x}$.

5.
Das Problem (P. 2. 1.) (bzw. (P. 2. 1'.) ist für $\bar{y} \in R_+^n$ mit

$$\begin{cases} \bar{y}_k > \tilde{y}_k & \text{für ein } k = 1, \ldots, n \\ \bar{y}_i \le \tilde{y}_i & \text{für } i \ne k,\ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

streng lokal lösbar; diese Lösung sei $\bar{x} > 0$ genannt mit

$$\bar{x}_l > \tilde{x}_l \text{ für mindestens ein } l = 1, \ldots, n.$$

6.

$$\beta \bar{x} - b(\beta \bar{x}) \le \bar{x} - b(\bar{x}), \quad \forall \beta \in [0,\ 1].$$

Dann gilt:

A.

$$\frac{\bar{x}_i - \tilde{x}_i}{\tilde{x}_i} \le \frac{\bar{x}_k - \tilde{x}_k}{\tilde{x}_k}, \quad i = 1, \ldots, n\,;$$

B.

$$\frac{\bar{x}_k - \tilde{x}_k}{\tilde{x}_k} \le \frac{(\bar{x}_k - b_k(\bar{x}_k)) - (\tilde{x}_k - b_k(\tilde{x}_k))}{\tilde{x}_k - b_k(\tilde{x}_k)},$$

falls noch zusätzlich die Voraussetzung

7.

$$\tilde{x}_k - b_k(\tilde{x}_k) > 0$$

gilt.

Beweis:

A.:

Sei $s \in R_+^n \setminus \{0\}$. Wegen der Voraussetzungen 4. – 5. gibt es ein $\bar{\varepsilon}$, derart dass für alle $\varepsilon \in [0,\ \bar{\varepsilon}]$ ein $\tilde{x}_\varepsilon \in L$ mit der Eigenschaft

$$\tilde{x}_\varepsilon - b(\tilde{x}_\varepsilon) = \tilde{x} - b(\tilde{x}) + \varepsilon s$$

existiert, wobei $\tilde{x}_\varepsilon$ eine stetige Funktion von ε ist und für alle $\varepsilon \in [0,\ \bar{\varepsilon}]$ gilt:

$$\tilde{x}_i > 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \tilde{x}_\varepsilon = \tilde{x}, \tag{6. 1.}$$

$$0 < \min_i \{\tilde{x}_{\varepsilon_i} / \tilde{x}_i\} < 1.$$

Nehmen wir an, dass

$$\bar{x}_k / \tilde{x}_{\varepsilon_k} < \bar{x}_i / \tilde{x}_{\varepsilon_i} \quad \text{für ein } i = 1, 2, ..., n$$

ist. Sei ferner

$$B := \{i \mid (\tilde{x}_{\varepsilon_i} / \bar{x}_i) = \beta_\varepsilon\}$$

mit

$$\beta_\varepsilon := \min_i \{\tilde{x}_{\varepsilon_i} / \bar{x}_i\}.$$

Offensichtlich ist $k \notin B$.

Aus

$$\tilde{x}_\varepsilon \geq \beta_\varepsilon \bar{x}$$

folgt

$$\tilde{x}_{\varepsilon_i} - b_i(\tilde{x}_i) \leq \beta_\varepsilon \bar{x}_i - b_i(\beta_\varepsilon \bar{x}), \quad i \in B$$

und

$$\tilde{x}_\varepsilon - b_i(\beta_i \bar{x}_i) \leq \bar{x}_i - b_i(\beta_i \bar{x}), \quad i \in B.$$

Damit gilt

$$\tilde{x}_i - b_i(\bar{x}) + \varepsilon s_i \leq \bar{x}_i - b_i(\bar{x}), \quad i \in B.$$

Die widerspricht jedoch die Voraussetzung 5.

Daher gilt:

$$\bar{x}_k / \tilde{x}_{\varepsilon_k} \geq \bar{x}_i / \tilde{x}_{\varepsilon_i}, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad \varepsilon \in]0, \ \bar{\varepsilon}[$$

und

$$\bar{x}_i / \tilde{x}_i = \bar{x}_k / \tilde{x}_k \qquad \because \ (6. 1.))$$

B:
Die Behauptung lässt sich durch eine unmittelbare Anwendung des nachfolgenden Lemmas beweisen.

q.e.d

L. 6. 1.
Sei

$a := (a_k) \in R^n_+ \setminus \{0\}$

$b := (b_k) \in R^n_+ \setminus \{0\}$

$\eta := a_k / b_k\,, \quad a_k, b_k \neq 0$

$\{a, b, \eta b\} \subset \tilde{M} \subset R^n_+$

$\{\alpha, \beta, \eta\beta\} \subset \Delta \subset R^1, \quad \alpha, \beta \in R^1, \quad \alpha > 0$

$f(x, \delta): \ \tilde{M} \to R^1, \ \forall \delta \in \Delta$

$$\left.\begin{array}{r} f(a,\alpha) \geq f(\eta b, \alpha) \\ f(\eta b, \alpha) \geq f(\eta b, \eta\beta) \end{array}\right\} \quad \alpha > \eta\beta$$

$\eta f(b, \beta) \leq f(\eta b, \eta\beta)$

$a_k = f(a, \alpha), \quad b_k = f(b, \beta).$

Dann gilt:

$$\frac{b_k - a_k}{a_k} \leq \frac{\beta - \alpha}{\alpha}.$$

B. 6. 2.

Die Voraussetzung 4 im S. 6. 1. ist erfüllt, wenn z.B. die Funktion $x - b(x) =: f(x)$ stetig und deren Jacobische Matrix für $\tilde{x}$ regulär ist.

B. 6. 3.

Die Voraussetzung 5 in S. 6. 1. heißt:

Erhöht sich die Endnachfrage eines Sektors (während die der anderen sich nicht ändert), dann ist eine Gesamtproduktion echt möglich, wobei mindestens ein Sektor mehr produziert als vorher.

B. 6. 4.

Die Voraussetzung 6 in S. 6. 1. heißt:

Reduziert man die Gesamtproduktion aller Sektoren so erhöht sich die Endnachfrage keines der Sektoren im Vergleich zu vorher.

Diese Voraussetzung ist erfüllt, wenn z.B. (B. 9.) erfüllt ist. Denn aus $\bar{x}_i - b(\bar{x}) \geq 0$ und (B. 9.) folgt für $\beta \in]0, 1[$, $\lambda = 1/\beta$ und $x = \beta \bar{x}$ die Voraussetzung 6. Die Bedingung (B. 9.) ist jedoch wesentlich stärker als die Voraussetzung 6 in S. 6. 1.

B. 6. 5.

Unter den angegebenen Voraussetzungen besagt die Behauptung des Satzes S. 6. 1.:

A. Die prozentuale Änderung der Gesamtproduktion keines der Sektoren ist größer als die des Sektors, dessen Endnachfrage erhöht würde.

B. Die prozentuale Änderung der Gesamtproduktion des Sektors, dessen Endnachfrage erhöht wurde, ist nicht größer als die prozentuale Änderung der Endnachfrage des genannten Sektors, falls dieser Sektor auch vorher eine Endnachfrage hatte.

<u>S. 6. 2.</u>
Gegeben sei das Problem (P. 2. 1.) (bzw. (P. 2. 1'.) in der Form

$$y_i = f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

(bzw. in der Form $y = f(x)$)

mit

$$f_i(x) := x_i - b_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

(bzw. $f(x) := x - b(x)$).

Ferner möge folgendes gelten:

1.

$$\bar{x}, \bar{\bar{x}} > 0, \quad \bar{\bar{x}} \geq v,$$

$$\lambda^* := \alpha \min_i \frac{v_i}{\bar{\bar{x}}_i}, \qquad \alpha \in \left]0,\ 1\right[.$$

2.

$$P \subset R^n : \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in P,$$

$$\forall (x \in P, x > 0) \ \Rightarrow \ \left\langle P \supset \text{eine } U(x) \wedge P \supset \text{eine } U(\lambda x), \forall \lambda \in \left]\lambda^*,\ 1\right[\right\rangle.$$

3.

$$f : P \to R^n : \text{stetig:}$$

$$\forall \left(x^1, x^2 \in P,\ x^1 \leq x^2 \right) \ \Rightarrow \ f(x^1) \leq f(x^2).$$

4.

$$\bar{y}, \bar{\bar{y}} \in R_+^n:\ f(\bar{x}) = \bar{y} \wedge f(\bar{\bar{x}}) = \bar{\bar{y}}.$$

5.

$$\left\langle \bar{x}_l = \bar{\bar{x}}_l,\ \bar{x}_i \leq \bar{\bar{x}}_i,\ i \neq l;\ i = 1, 2, \ldots, n \right\rangle \ \Rightarrow \ \bar{\bar{x}}_l \leq \bar{\bar{y}}_l.$$

6.

$$\bar{\bar{y}}_k > \bar{y}_k, \qquad \bar{\bar{y}}_i \leq \bar{y}_i, \quad i \neq k;\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

7.

$$\bar{x}_l < \tilde{x}_l, \quad \text{für mindestens ein } l = 1, 2, ..., n.$$

8.

$$f(\lambda \tilde{x}) \leq f(\bar{x}), \quad \forall \lambda \in \left]\lambda^*, 1\right[.$$

9.

$f(x)$ ist ein lokaler Homomorphismus in $\bar{x}$.

Dann gilt:

A.

$$\frac{\tilde{x}_i - \bar{x}_i}{\tilde{x}_i} \leq \frac{\tilde{x}_k - \bar{x}_k}{\tilde{x}_k}, \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

B.

$$\frac{\tilde{x}_k - \bar{x}_k}{\tilde{x}_k} \leq (1 - \vartheta).$$

Falls zusätzlich folgendes gilt:

10.

$$f_k(\tilde{x}) > 0.$$

11.

$$f_k(\tilde{x}) t(\lambda) = f_k(\lambda \tilde{x}), \quad \forall \lambda \in \left]\lambda^*, 1\right[,$$

wobei $t(\lambda)$ eine auf $\left]\lambda^*, 1\right[$ definierte, streng monoton fallende Funktion ist.

12.

$$\bar{y}_k = t(\vartheta) \tilde{y}_k, \quad \vartheta \in \left]\lambda^*, 1\right[.$$

Beweis:

Sei $s \in R^n_+ \setminus \{0\}$. Wegen der Bedingung 9. gibt es ein $\bar{\varepsilon}$ derart, dass für alle $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[$ ein $\bar{x}_\varepsilon \in P$ mit der Eigenschaft

$$f(\bar{x}_\varepsilon) = f(\bar{x}) - \varepsilon s$$

existiert, wobei $\bar{x}_\varepsilon$ eine stetige Funktion von ε ist und für alle $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[$ gilt:

$$\bar{x}_\varepsilon > 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \bar{x}_\varepsilon = \bar{x},$$

$$\lambda_\varepsilon := \min_i \{\bar{x}_\varepsilon / \tilde{x}_\varepsilon\}; \qquad \lambda_\varepsilon \in \left]\lambda^*,\ 1\right[.$$

Nehmen wir an, dass

$$\frac{\bar{x}_{\varepsilon_i}}{\tilde{x}_i} < \frac{\bar{x}_{\varepsilon_k}}{\tilde{x}_k} \qquad \text{für ein } i = 1, 2, \ldots, n$$

gilt. Sei ferner

$$\Lambda := \{i \mid \bar{x}_{\varepsilon_i} / \tilde{x}_i = \lambda_i\}.$$

Offensichtlich gilt $k \notin \Lambda$.

Aus

$$\bar{x}_\varepsilon \geq \lambda_\varepsilon \tilde{x}$$

folgt

$$f_i(\bar{x}_\varepsilon) \geq f_i(\lambda_\varepsilon \tilde{x}), \quad i \in \Lambda$$

und

$$f_i(\lambda_\varepsilon \tilde{x}) \geq f_i(\tilde{x}), \quad i \in \Lambda,$$

was der Voraussetzung 6. widerspricht. Damit gilt die Behauptung [Vgl. den Beweis von S. 6. 1. A.].

B.
Aus den Voraussetzungen 10. – 12. und

$$\lambda = \bar{x}_k / \tilde{x}_k$$

folgt

$$\bar{x}_k = \lambda \tilde{x}_k, \quad \lambda \in \left]\lambda^*,\ 1\right[.$$

Man erhält ferner

$$\bar{x} \geq \lambda \tilde{x}, \quad \lambda \in \left]\lambda^*,\ 1\right[. \qquad (\because \text{ S. 6. 1. A.})$$

Es gilt also

$$\left.\begin{aligned} f_k(\bar{x}) &\geq f_k(\lambda \tilde{x}) \\ f_k(\lambda \tilde{x}) &= t(\lambda)\, \tilde{y}_k \end{aligned}\right\}, \quad \lambda \in \left]\lambda^*,\ 1\right[.$$

Damit erhält man:

$$\frac{\bar{y}_k}{\tilde{y}_k} \geq t(\lambda), \qquad \lambda \in \left]\lambda^*,\ 1\right[,$$

$$\frac{\bar{y}_k}{\tilde{y}_k} = t(\vartheta).$$

Dies bedeutet, dass

$$\lambda \geq \vartheta$$

gilt, was sich als Behauptung des Satzes S. 6. 2. (B) schreiben lässt.

q.e.d.

B. 6. 6.
Satz S. 6. 2. beinhaltet weitere Elastizitätsaussagen für eine umgeformte Fassung des Problems (P. 2. 1'.). In dieser Form wird die Endnachfrage als eine Funktion der Gesamtproduktion betrachtet. Dabei wird u. a. vorausgesetzt:

- Die Endnachfragefunktion ist stetig und monoton wachsend.
- Das Problem ist für die zwei Endnachfragevektoren $\tilde{y}, \bar{y}$ lösbar; die entsprechenden Gesamtproduktionsvektoren seien mit $\tilde{x}, \bar{x}$ bezeichnet.
- Wird die Gesamtproduktion der einzelnen Sektoren nicht reduziert, während die Gesamtproduktion eines Sektors gleich bleibt, so nimmt die Endnachfrage dieses Sektors nicht ab.
- Die Endnachfrage von nur einem Sektor wird erhöht, während die der anderen Sektoren nicht erhöht wird.
- Die Gesamtproduktion von mindestens einem Sektor wird reduziert.

Unter den angegebenen Voraussetzungen besagt S. 6. 2. A:

Die Prozentuale Änderung der Gesamtproduktion keines der Sektoren ist größer als die des Sektors, dessen Endnachfrage erhöht wurde.

B. 6. 7.
Neben den in S. 6. 2. B. angeführten Abschätzungen für die prozentuale Änderung der Gesamtproduktion der einzelnen Sektoren lassen sich für die Größe

$$\frac{\tilde{x}_i - \bar{x}_i}{\tilde{x}_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

bzw.

$$\frac{\tilde{x}_k - \bar{x}_k}{\tilde{x}_k}$$

auch andere Abschätzungen angeben.

Sei z.B. $z > 0$ gegeben, wobei

$$\frac{1}{1-\vartheta}(f_k(\vartheta\tilde{x}) - f_k(\tilde{x})) \geq z$$

gelten möge. Dann gilt unter Berücksichtigung von

$$\bar{y}_k = f_k(\vartheta\tilde{x})$$

die Abschätzung

$$\frac{\tilde{x}_i - \bar{x}_i}{\tilde{x}_i} \leq \frac{\tilde{y}_k - \bar{y}_k}{z}, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{6. 2.}$$

(Letzte Aktualisierung: 21.08.08)