V

Primärressourcen im nichtlinearen Input-Output-Modell

D. 5. 1.
Als *Primärressourcen* (*exogene Faktoren*, *Randinputs*) werden Wertbestandteile außer den Lieferungen innerhalb der produktiven Sphäre bezeichnet.

(Diese sind z.B. Arbeitskräfte, Importe, Gewinn, Steuer usw.)

Sei

$l_j,\ j=1,2,...,n$: die benötigten Arbeitskräfte im Sektor j,

$r_j,\ j=1,2,...,n$: die Abschreibung im Sektor j,

$m_j,\ j=1,2,...,n$: die Importe des Sektors j,

$q_j,\ j=1,2,...,n$: die Gewinne, Steuer usw. des Sektor j.

B. 5. 1.
Zur Vereinfachung der Darstellung und Meidung von Wiederholungen sei zunächst von einer einzigen Primärressourcen $\tilde{b}_j,\ j=1,2,...,n$, ausgegangen. Sei also

$$\tilde{b}_j = l_j + r_j + m_j + q_j, \quad j=1,2,...,n. \tag{5. 1.}$$

Später werden einige Besonderheiten der einzelnen Bestandteile von $\tilde{b}_j,\ j=1,2,...,n$, untersucht.

D. 5. 2.
Allgemein sei

$$\tilde{b}:\ R_+^m \to R_+^n \tag{5. 2.}$$

als *Primärressourcenfunktion* (*Funktion der exogenen Faktor*, *Randinputfunktion*) bezeichnet, wobei unter Berücksichtigung von (B. 5. 1.) zunächst $m=1$ vorausgesetzt wird.

B. 5. 2.
Im Allgemeinen ist $\tilde{b}_j,\ j=1,2,...,n$, von der Gesamtproduktion aller Sektoren der Volkswirtschaft abhängig, d. h.

$$\tilde{b}_j = \tilde{b}_j(x) \qquad (5.\ 3.)$$

$$\equiv \tilde{b}^+_j(x) \cdot x_j, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Zwei wichtige Spezialfälle der Primärressourcenfunktion (5. 3.) sind:

$$\tilde{b}_j = \tilde{b}_j(x)$$

$$\equiv \tilde{b}^+_j(x_j) \cdot x_j, \quad j = 1, 2, ..., n \qquad (5.\ 4.)$$

und

$$\tilde{b}_j = \tilde{b}^+_j \cdot x_j, \quad j = 1, 2, ..., n. \qquad (5.\ 5.)$$

B. 4. 3.
Aus (4. 3.) geht hervor, dass die vom Sektor $j = 1, 2, ..., n$ benötigte Menge an die Primärressource der Gesamtproduktion dieses Sektors proportional ist.
Die Größe

$$\tilde{b}^+_j := \frac{\tilde{b}_j}{x_j}, \quad j = 1, 2, ..., n, \qquad (5.\ 6.)$$

wird als *Koeffizient des direkten Ressourcenaufwands* bezeichnet.
Es gilt im Allgemeinen

$$\tilde{b}^+ \cdot x \leq \tilde{b}$$

mit

$$\tilde{b}^+ := (\tilde{b}^+_j), \quad j = 1, 2, ..., n, \qquad (5.\ 7.)$$

und

$\tilde{b} \in R^1_+$: die benötigte Menge an die Primärressource für alle Sektoren der Volkswirtschaft.

B. 5. 4.
Analog den Koeffizienten des vollen Aufwands lassen sich auch für die Primärressourcen *Koeffizienten des vollen Ressourcenaufwands* $\tilde{\tilde{b}}_j$, $j = 1, 2, ..., n,$ nach folgender Formel ermitteln:

$$\tilde{\tilde{b}}_j = \tilde{b}_j^{+} + \tilde{b}_j^{++}, \quad j = 1, 2, ..., n, \qquad (5.\ 8.)$$

mit

$\tilde{b}_j^{+},\ j = 1, 2, ..., n$: der Koeffizient des direkten Ressourcenaufwands für Sektor j,

$\tilde{b}_j^{++},\ j = 1, 2, ..., n$: der Koeffizient des indirekten Ressourcenaufwands für Sektor j.

B. 5. 5.

Entsprechend den Formeln (5. 3.) – (5. 5.) lassen sich $\tilde{b}_j^{++},\ j = 1, 2, ..., n,$ folgendermaßen ermitteln:

$$\begin{aligned}\bar{b}_j &= \tilde{b}_j^{+}(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \bar{b}_i \cdot a_{ij}(x^*) \\ &= \tilde{b}_j^{+}(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \bar{b}_i \frac{b_{ij}(x^*)}{x_j^*}, \quad j = 1, 2, ..., n;\end{aligned} \qquad (5.\ 9.)$$

$$\begin{aligned}\bar{b}_j &= \tilde{b}_j^{+}(x_j^*) + \sum_{i=1}^{m} \bar{b}_i \cdot a_{ij}(x_j^*) \\ &= \tilde{b}_j^{+}(x_j^*) + \sum_{i=1}^{m} \bar{b}_i \frac{b_{ij}(x_j^*)}{x_j^*}, \quad j = 1, 2, ..., n;\end{aligned} \qquad (5.\ 10.)$$

$$\begin{aligned}\bar{b}_j &= \tilde{b}_j^{+} + \sum_{i=1}^{m} \bar{b}_i \cdot a_{ij} \\ &= \tilde{b}_j^{+} + \sum_{i=1}^{m} \bar{b}_i \frac{b_{ij}}{x_j^*}, \quad j = 1, 2, ..., n.\end{aligned} \qquad (5.\ 11.)$$

Hier ist $x^* := (x_j^*) \in R_+^n$ eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x &= A(x)x + y \\ &= b(x) + y.\end{aligned}$$

B. 5. 6.

Für die Spezialfälle

$$b(x) := (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} b_j(x), ..., \alpha_{nj} b_j(x))^T$$

bzw.

$$b(x) := (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} b_j(x_j), ..., \alpha_{nj} b_j(x_j))^T$$

lassen sich (5. 9.) bzw. (5. 10.) folgendermaßen umschreiben:

$$\bar{b}_j = \tilde{b}_j^{+}(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \cdot \frac{\alpha_{ij} b_j(x^*)}{x_j^*}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5. 12.}$$

$$\bar{b}_j = \tilde{b}_j^{+}(x_j^*) + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \cdot \frac{\alpha_{ij} b_j(x_j^*)}{x_j^*}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5. 13.}$$

B. 5. 7.
Im Falle linearer Aufwandsfunktionen gilt

$$b_j(x) = b_j(x_j) = c_j x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

d. h.

$$\frac{\alpha_{ij} b_j(x^*)}{x_j^*} = \frac{\alpha_{ij} b_j(x_j^*)}{x_j^*} = \alpha_{ij} c_j = a_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

B. 5. 8.
Das Gleichungssystem (5. 9.) lässt sich in der Matrizenschreibweise wie folgt darstellen:

$$\bar{b} = \tilde{b}^{+}(x^*) + A^T(x^*)\bar{b}. \tag{5. 14.}$$

Hier sind:

$$\bar{b} := (\bar{b}_j) \in R_+^n,$$
$$\tilde{b}^{+}(x^*) := (\tilde{b}_j^{+}) \in R_+^n,$$
$$A(x^*) := (a_{ij}(x^*)), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

B. 5. 9

Aus (4. 14.) lässt sich $\bar{b}$ wie folgt direkt berechnen:

$$\bar{b} = (E - A^T(x^*))^{-1} \tilde{b}^{+}(x^*). \tag{5. 15.}$$

Es wird jedoch empfohlen, zur Lösung des linearen Gleichungssystems das Verfahren der sukzessiven Approximation [vgl. Kapitel III] anzuwenden:

$$\bar{b}^{(0)} = \tilde{b}^{+}(x^*) \tag{5. 16.}$$

$$\bar{b}^{(\nu)} = A^T(x^*)\bar{b}^{(\nu-1)} + \tilde{b}^{+}(x^*). \tag{5. 17.}$$

S. 5. 1.

Die durch (5. 16.) – (5. 17.) erzeugte Folge $\{\bar{b}^{(\nu)}\},\ \nu \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ ist monoton wachsend.

Beweis (Induktion):
Es gilt:

$$\bar{b}^{(1)} = A^T(x^*)\bar{b}^{(0)} + \bar{b}^{(0)} \qquad (\because (5.16.-5.17.))$$

$$\geq \bar{b}^{(0)} \qquad (\because A^T(x^*) \geq 0,\ \bar{b}^{(0)} \geq 0)$$

$$\geq 0\,.$$

Es gelte die Induktionshypothese

$$\bar{b}^{(\nu)} \geq \bar{b}^{(\nu-1)}$$

$$\geq 0.$$

Es gilt dann:

$$\bar{b}^{(\nu+1)} - \bar{b}^{(\nu)} = A^T(x^*)\bar{b}^{(\nu)} - A^T(x^*)\bar{b}^{(\nu-1)}$$

$$= A^T(x^*)(\bar{b}^{(\nu)} - \bar{b}^{(\nu-1)})$$

$$\geq 0\,,$$

$$\bar{b}^{(\nu+1)} \geq \bar{b}^{(\nu)}$$

$$\geq 0\,.$$

q.e.d.

<u>S. 5. 2.</u>
Die Folge (5. 16.)-(5. 17.) konvergiert gegen die eindeutige Lösung des Gleichungssystems (5. 14.).

Beweis:
Die Behauptung folgt aus Satz S. 2. . unter Berücksichtigung der Tatsache, dass folgendes gilt:

$$\| A(x^*) \|_1 =: \max_j \sum_{i=1}^{n} | a_{ij}(x^*) | \qquad (5.\ 18.)$$

$$= \max_i \sum_{j=1}^{n} | a_{ji}(x^*) |$$

$$= \| A^T(x^*) \|_\infty$$

$$< 1\,.$$

q.e.d.

B. 5. 10.
S. 5. 2. lässt sich auch direkt beweisen:
(4. 18. garantiert die Existenz von $(E - A^T(x^*))^{-1}$ und damit die eindeutige Lösbarkeit von (4. 14.).
Es gilt ferner

$$\bar{b}^{(1)} = A^T(x^*)\bar{b}^{(0)} + \bar{b}^{(0)},$$
$$\bar{b}^{(2)} = A^T(x^*)\bar{b}^{(1)} + \bar{b}^{(0)},$$
$$\vdots$$
$$\bar{b}^{(\nu)} = A^T(x^*)\bar{b}^{(\nu-1)} + \bar{b}^{(0)},$$

also

$$\bar{b}^{(\nu)} = (E + A^T(x^*) + (A^T)^2(x^*) + \ldots + (A^T)^{\nu-1}(x^*))\bar{b}^{(0)} + (A^T)^\nu(x^*)\bar{b}^{(0)}. \qquad (5.\ 19.)$$

man erhält ferner

$$\lim_{\nu\to\infty}(A^T)^\nu(x^*) = 0 \qquad \because\ (5.\ 18.)\ )$$

und

$$\lim_{\nu\to\infty}(E + A^T(x^*) + (A^T)^2(x^*) + \ldots + (A^T)^{\nu-1}(x^*)) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(A^T)^\nu(x^*) = (E - A^T(x^*))^{-1}.$$

geht man in (5. 19.) zum Grenzwert über, so ergibt sich

$$\bar{b} = \lim_{\nu\to\infty}\bar{b}^{(\nu)} = (E - A^T(x^*))^{-1}\tilde{b}^{+}(x^*). \qquad (5.\ 20.)$$

Damit ist die Konvergenz der Folge (5. 16.) – (5. 17.) bewiesen.
Aus (4. 20.) folgt nun:

$$(E - A^T(x^*))^{-1}\bar{b} = \tilde{b}^{+}(x^*)$$
$$\bar{b} = A^T(x^*)\bar{b} + \tilde{b}^{+}(x^*),$$

d. h. der Grenzwert $\bar{b}$ löst das System (4. 14.). Da $(E - A^T(x^*))$ regulär ist, ist diese Lösung eindeutig.

q.e.d.

B. 5. 11.

Die Folge (5. 17.) konvergiert auch für jede beliebige Anfangslösung $\bar{b}^{(0)}$ (also nicht nur für $\bar{b}^{(0)} := \tilde{b}^{+}(x^*)$) gegen die eindeutige Lösung von (5. 14.) [Vgl. dazu den Beweis von S. 5. 2.]

S. 5. 3.
Für die Folge (4. 16.) – (4. 17.) gilt die Fehlerabschätzung

$$\|\bar{b}-\bar{b}^{(\nu)}\| \le \frac{\| A^T(x^*)\|^{\nu+1}}{1-\| A^T(x^*)\|}\cdot\|\tilde{b}^{+}(x^*)\|, \tag{5. 21.}$$

Beweis:
Seien $\bar{b}^{(\nu-1)}$ und $\bar{b}^{(\nu)}$, $\nu \ge 1$, zwei nacheinander folgende Näherungslösungen des Gleichungssystems (4. 14.). Es gilt für $\mu \ge 1$:

$$\|\bar{b}^{(\nu+\mu)}-\bar{b}^{(\nu)}\| \le \|\bar{b}^{(\nu+\mu)}-\bar{b}^{(\nu)}\| + \|\bar{b}^{(\nu+2)}-\bar{b}^{(\nu+1)}\| + \ldots + \|\bar{b}^{(\nu+\mu)}-\bar{b}^{(\nu+\mu-1)}\|,$$

$$\bar{b}^{(\vartheta+1)}-\bar{b}^{(\vartheta)} \le A^T(x^*)(\bar{b}^{(\vartheta)}-\bar{b}^{(\vartheta-1)}),$$

$$\|\bar{b}^{(\vartheta+1)}-\bar{b}^{(\vartheta)}\| \le \|A^T(x)\| + \|\bar{b}^{(\vartheta)}-\bar{b}^{(\vartheta-1)}\|$$

$$\le \|A^T(x)\|^{\vartheta-\nu} + \|\bar{b}^{(\nu+1)}-\bar{b}^{(\nu)}|, \qquad \nu\in[1,\ \vartheta[.$$

$$\|\bar{b}^{(\nu+\mu)}-\bar{b}^{(\nu)}\| \le \|\bar{b}^{(\nu+1)}-\bar{b}^{(\nu)}\| + \|A^T(x)\|\cdot\|\bar{b}^{(\nu+1)}-\bar{b}^{(\nu)}\| + \ldots + \|A^T(x)\|^{\mu-1}\cdot\|\bar{b}^{(\nu+1)}-\bar{b}^{(\nu)}\|$$

$$\le \frac{1}{1-\|A^T(x^*)\|}\cdot\|\bar{b}^{(\nu+1)}-\bar{b}^{(\nu)}\|. \tag{5. 23.}$$

Geht man zum Grenzwert über, so erhält man für $\mu \to \infty$

$$\|\bar{b}-\bar{b}^{(\nu)}\| \le \frac{\cdot\|\bar{b}^{(\nu+1)}-\bar{b}^{(\nu)}\|}{1-\|A^T(x^*)\|}, \quad \nu \ge 1,$$

oder

$$\|\bar{b}-\bar{b}^{(\nu)}\| \le \frac{\|A^T(x^*)\|}{1-\|A^T(x^*)\|}\cdot\|\bar{b}^{(\nu+1)}-\bar{b}^{(\nu)}\|. \tag{5. 24.}$$

Es gilt ferner

$$\| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \| \le \frac{\| A^T(x^*) \|^{\nu}}{1 - \| A^T(x^*) \|} \cdot \| \bar{b}^{(1)} - \bar{b}^{(0)} \| .$$

Für $\bar{b}^{(0)} := \tilde{b}^{+}(x^*)$ hat man:

$$\tilde{b}^{(1)} = A^T(x^*) \tilde{b}^{+}(x^*) + \tilde{b}^{+}(x^*),$$

$$\| \bar{b}^{(1)} - \tilde{b}^{(0)} \| = \| A^T(x^*) \tilde{b}^{+}(x^*) \|$$

$$\le \| A^T(x^*) \| \cdot \| \tilde{b}^{+}(x^*) \|$$

und

$$\| \bar{b} - b^{(\nu)} \| \le \frac{\| A^T(x^*) \|^{\nu+1}}{1 - \| A^T(x^*) \|} \cdot \| \tilde{b}^{+}(x^*) \| .$$

q.e.d.

B. 5. 12.

Für $\| A^T(x^*) \| \le \frac{1}{2}$ gilt wegen (5. 24.)

$$\| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \| \le \| \bar{b}^{(\nu)} - \bar{b}^{(\nu-1)} \| .$$

In diesem Fall hat man für

$$\| \bar{b}^{(\nu)} - \bar{b}^{(\nu-1)} \| < \varepsilon$$

die Abschätzung

$$\| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \| < \varepsilon . \qquad (5.\ 25.)$$

Für den Fall, dass

$$\| \bar{b}^{(\nu)} - \bar{b}^{(\nu-1)} \| \le \frac{1-q}{q} \varepsilon,$$

$$q := \| A^T(x^*) \| < 1,$$

gilt hat man die Abschätzung

$$\| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \| < \varepsilon \qquad (5.\ 26.)$$

also

$$\| \bar{b}_i - \bar{b}_i^{(\nu)} \| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Es wird dabei natürlich vorausgesetzt, dass die Näherungen $\bar{b}^{(\lambda)}$, $\lambda = 0,1,...\nu$, genau, also ohne Rundungsfehler, berechnet worden sind.

B. 5. 13.

Multipliziert man die Gleichung (5. 15.) von links mit y^T, so ergibt sich

$$y^T \bar{b} = x^T \tilde{b}^{+} \qquad (5.\ 27.)$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \bar{b}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{b}_i^{+} . \qquad (5.\ 28.)$$

Hieraus folgt eine ökonomische Interpretation des Koeffizienten $\bar{b}_i$ des $i-$ten Ressourcenaufwands: Er gibt den Ressourcenaufwand pro Einheit der Endnachfrage an.

B. 5. 14.

Zur Lösung des Gleichungssystems (5. 14.) kann man das Gauß-Seidel-Verfahren [vgl. S. 3. 14.] anwenden, das gewöhnlich schneller konvergiert als das Verfahren (5. 16.) – (5. 17.) [vgl. B. 5. 16]:

$$\bar{b}_i^{(0)} := \tilde{b}_i^{(0)}(x^*), \; i = 1, 2, ..., n, \qquad (5.\ 29.)$$

$$\bar{b}_i^{(\nu)} := \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^T (x^*) \bar{b}_j^{(\nu)} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij}^T (x^*) \bar{b}_j^{(\nu-1)} + \tilde{b}_i^{+}(x^*), \; i = 1, 2, ..., n; \; \nu \in N. \qquad (5.\ 30.)$$

S. 5. 4.

Die durch (5. 29.) – (5. 30) erzeugte Folge $\{\bar{b}\}$, $\nu \in N \cup \{0\}$, ist monoton wachsend.

Beweis (Induktion):
Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} \bar{b}_i^{(1)} &:= \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^T (x^*) \bar{b}_j^{(1)} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij}^T (x^*) \bar{b}_j^{(0)} + \tilde{b}_i^{+}(x^*) \\ &\geq \tilde{b}_i^{+}(x^*) \\ &= \bar{b}_i^{(0)} . \end{aligned}$$

Mit der Induktionshypothese

$$x^{(\nu)} \geq x^{(\nu-1)}$$

folgt durch eine zweite Induktion über i:

$(i=1)$:

$$\begin{aligned}
\bar{b}_1^{(\nu+1)} &= \bar{b}_1^{+}(x^*) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^T(x^*)\,\bar{b}_j^{(\nu)} \\
&\geq \bar{b}_1^{+}(x^*) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^T(x^*)\,\bar{b}_j^{(\nu-1)} \\
&= \bar{b}_1^{(\nu)} \quad .
\end{aligned}$$

$(i \Rightarrow i+1)$:

$$\begin{aligned}
\bar{b}_{i+1}^{(\nu+1)} &= \bar{b}_{i+1}^{+}(x^*) + \sum_{j=1}^{i} a_{ij}^T(x^*)\,\bar{b}_j^{(\nu+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^T(x^*)\,\bar{b}_j^{(\nu)} \\
&\geq \bar{b}_{i+1}^{+}(x^*) + \sum_{j=1}^{i} a_{ij}^T(x^*)\,\bar{b}_j^{(\nu)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^T(x^*)\,\bar{b}_j^{(\nu-1)} \\
&= \bar{b}_{i+1}^{(\nu)} .
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\bar{b}_i^{(\nu+1)} \geq \bar{b}_i^{(\nu)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

oder

$$\bar{b}^{(\nu+1)} \geq \bar{b}^{(\nu)} \quad .$$

q.e.d.

S. 5. 5.
Das Verfahren (5. 29.) – (5. 30.) konvergiert gegen die einzige Lösung des Gleichungssystems (5. 14.).

Beweis:
Es gilt:

$$\bar{b}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^T(x^*)\,\bar{b}_j^{(\nu)} + \tilde{b}_i^{+}(x^*)$$

$$\bar{b}_i^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^T(x^*)\,\bar{b}_j^{(\nu)} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij}^T(x^*)\,\bar{b}_j^{(\nu-1)} + \tilde{b}_i^{+}(x^*), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\bar{b}_i - \bar{b}_i^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^T(x^*)(\bar{b}_j - \bar{b}_j^{(\nu)}) + \sum_{j=i}^{n} a_{ij}^T(x^*)(\bar{b}_j - \bar{b}_j^{(\nu-1)})$$

$$\left|\bar{b}_i - \bar{b}_i^{(\nu)}\right| \le \sum_{j=1}^{i-1} \left|a_{ij}^T(x^*)\right| \left|\bar{b}_j - \bar{b}_j^{(\nu)}\right| + \sum_{j=i}^{n} \left|a_{ij}^T(x^*)\right| \left|\bar{b}_j - \bar{b}_j^{(\nu-1)}\right|, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Wegen (5. 18.) und

$$\| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty \le \max_i | \bar{b}_i - \bar{b}_i^{(\nu)} |,$$

oder

$$\| \bar{b}_j - \bar{b}_j^{(\nu)} \| \le \| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

erhält man

$$| \bar{b}_i - \bar{b}_i^{(\nu)} | \le p_i \| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty + q_i \| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu-1)} \|_\infty \qquad (5.\ 31.)$$

mit

$$p_i := \sum_{j=1}^{i-1} \left|a_{ij}^T(x^*)\right|, \qquad q_i := \sum_{j=i}^{n} \left|a_{ij}^T(x^*)\right|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Sei nun

$$\begin{aligned} | \bar{b}_s - \bar{b}_s^{(\nu)} | &:= \max_i | \bar{b}_i - \bar{b}_i^{(\nu)} | \\ &= \| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty . \end{aligned}$$

Setzt man in (5. 30.) $i := s$, so erhält man

$$\| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty \le p_s \| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty + q_s \| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu-1)} \|_\infty ,$$

d. h.

$$\| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty \le \frac{q_s}{1 - p_s} \| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu-1)} \|_\infty .$$

Daher hat man

$$\| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty \le \rho \| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu-1)} \|_\infty \qquad (5.\ 32.)$$

mit

$$\sigma := \min_i \frac{q_i}{1-p_i}. \tag{5. 33.}$$

Wir zeigen nun, dass

$$\sigma \le \left\| A^T(x^*) \right\|_\infty < 1$$

gilt:

$$p_i + q_i = \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij}^T(x^*) \right|$$

$$\le \left\| A^T(x^*) \right\|_\infty$$

$$< 1,$$

$$q_i \le \left\| A^T(x^*) \right\|_\infty - p_i,$$

$$\frac{q_i}{1-p_i} \le \frac{\left\| A^T(x^*) \right\|_\infty - p_i}{1-p_i}$$

$$\le \frac{\left\| A^T(x^*) \right\|_\infty - p_i \left\| A^T(x^*) \right\|_\infty}{1-p_i}$$

$$= \left\| A^T(x^*) \right\|_\infty.$$

Damit gilt $\sigma \le \left\| A^T(x^*) \right\|_\infty < 1$ und

$$\| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty \le \sigma^\nu \| \bar{b} - \bar{b}^{(0)} \|_\infty,$$

also

$$\lim_{\nu \to \infty} \bar{b}^{(\nu)} = \bar{b}.$$

q.e.d.

B. 5. 15.
Vergleicht man die Ungleichung

$$\| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty \le \| A^T(x^*) \|_\infty \cdot \| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu-1)} \|_\infty$$

für das Verfahren (5.16.) – (5. 17.) mit der Ungleichung

$$\| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \| \;\leq\; \sigma \cdot \| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu-1)} \|$$

für das Verfahren (5. 29.) – (5. 30.), so folgt wegen $\sigma \leq \| A^T(x^*) \|_\infty$, dass das zweite Verfahren gewöhnlich schneller konvergiert.

B. 5. 16.

Wegen (5. 33.) ist es zweckmäßig, bei der Anwendung des Verfahrens (5. 29.) – (5. 30.) das Gleichungssystem (5. 14.) so umzuschreiben, dass

$$q_1 := \sum_{j=1}^{n} | a_{ij}^T 8x^*) |$$

minimal ist.

S. 5. 6.

Für das Verfahren (5. 29.) – (5. 30.) gilt die Fehlerabschätzung

$$\| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty \leq \frac{\sigma}{1-\sigma} \cdot \| \bar{b}^{(\nu)} - \bar{b}^{(\nu-1)} \|_\infty \tag{5. 34.}$$

mit

$$\sigma := \max_i \frac{\sum_{j=i}^{n} | a_{ij}^T (x^*) |}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} | a_{ij}^T (x^*) |} \tag{5. 35.}$$

$$\leq \;\; \| A^T(x^*) \|_\infty .$$

Beweis:

Seien $\bar{b}^{(\nu)}$ und $\bar{b}^{(\nu+1)}$ zwei nacheinander folgende Näherungslösungen des Verfahrens (5. 29.) – (5. 30.). Analog den Überlegungen beim Beweis der Beziehung (5. 2.) lässt sich zeigen, dass

$$\| \bar{b}^{(\nu+1)} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty \;\leq\; \sigma \cdot \| \bar{b}^{(\nu)} - \bar{b}^{(\nu-1)} \|_\infty$$

gilt.

Hieraus folgt.

$$\begin{aligned} \| \bar{b}^{(\nu+\mu)} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty \;&\leq\; \| \bar{b}^{(\nu+\mu)} - \bar{b}^{(\nu+\mu-1)} \|_\infty + \| \bar{b}^{(\nu+\mu-1)} - \bar{b}^{(\nu+\mu-2)} \|_\infty + \ldots + \| \bar{b}^{(\nu+1)} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty \\ &\leq \sigma^{\mu} \| \bar{b}^{(\nu)} - \bar{b}^{(\nu-1)} \|_\infty + \sigma^{\mu-1} \| \bar{b}^{(\nu)} - \bar{b}^{(\nu-1)} \|_\infty + \ldots. + \sigma \| \bar{b}^{(\nu)} - \bar{b}^{(\nu-1)} \|_\infty . \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{\mu\to\infty} \bar{b}^{(\nu+1)} = \bar{b}$$

ergibt sich die Behauptung.

q.e.d.

B. 5. 17.
Aus (5. 34.) folgt speziell

$$\| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty \;\leq\; \frac{\sigma^\nu}{1-\sigma} \cdot \| \bar{b}^{(1)} - \bar{b}^{(0)} \|_\infty , \tag{5. 36.}$$

d. h.

$$| \bar{b}_i - \bar{b}_i^{(\nu)} | \;\leq\; \frac{\sigma^\nu}{1-\sigma} \max_j | \bar{b}_j^{(1)} - \bar{b}_j^{(0)} |, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5. 36'.}$$

B. 3. 18.
Im Folgenden werden einige Beispiele für die Anwendung von Koeffizienten des direkten und vollen Ressourcenaufwands angeführt:

A. *Koeffizienten des direkten Ressourcenaufwands:*
Diese lassen sich u. a. zur Berechnung folgender Größen verwenden:

1) Anteil der verschiedenen im Sektor i, $i = 1, 2, \ldots, n,$ eingesetzten Primärressourcen am Endprodukt der einzelnen Sektoren:

$$\frac{\tilde{b}_j^{+} (E - A^T (x^*))_{ij}^{-1} y_i}{y_i} = \tilde{b}_j^{+} (E - A^T (x^*))_{ij}^{-1} y_i, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5. 37.}$$

2) Anteil der verschiedenen in den einzelnen Sektoren eingesetzten Primärressourcen am Endprodukt der Volkswirtschaft:

$$\frac{\tilde{b}_i^{+} \sum_{j=1}^{n} (E - A^T (x^*))_{ij}^{-1} y_j}{\sum_{j=1}^{n} y_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5. 38.}$$

3) Anteil der verschiedenen in den einzelnen Sektoren eingesetzten Primärressourcen an Bestandteilen des Endprodukts der Volkswirtschaft:

$$\frac{\tilde{b}_i^{+} \sum_{j=1}^{n} (E - A^T (x^*))_{ij}^{-1} c_j}{\sum_{j=1}^{n} c_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5. 39.}$$

$$\frac{\tilde{b}_i^+ \sum_{j=1}^{n} (E - A^T(x^*))_{ij}^{-1} u_j}{\sum_{j=1}^{n} u_j}, \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{5. 40.}$$

$$\frac{\tilde{b}_i^+ \sum_{j=1}^{n} (E - A^T(x^*))_{ij}^{-1} v_j}{\sum_{j=1}^{n} v_j}, \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{5. 41.}$$

Dabei sind:

c_j, $j = 1, 2, ..., n$: die individuelle Konsumtion des Sektors j,
s_j, $j = 1, 2, ..., n$: die gesellschaftliche Konsumtion des Sektors j,
u_j, $j = 1, 2, ..., n$: die Investitionen des Sektors j,
v_j, $j = 1, 2, ..., n$: der Export des Sektors j.

4) Einfache Ressourcenquote
Sie ist der reziproke Ausdruck des direkten Ressourcenaufwands:

$$\frac{1}{\tilde{b}_j^+} = \frac{x_j^*}{\tilde{b}_j}, \qquad j = 1, 2, ..., n. \tag{5. 42.}$$

B. Koeffizienten des vollen Ressourcenaufwands

Diese lassen sich. u. a. zur Berechnung folgender Größen verwenden:

1) Der Ressourcenaufwand eines Sektors zur Herstellung dessen Endprodukts:

$$\bar{b}_i \cdot y_i, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{5. 43.}$$

2) Der Ressourcenaufwand aller Sektoren zur Herstellung des Endprodukts der Volkswirtschaft:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \cdot y_i, \tag{5. 44.}$$

3) Der Ressourcenaufwand eines Sektors zur Realisierung der einzelnen Bestandteile des Endproduktes dieses Sektors:

$$\bar{b}_i \cdot c_i, \qquad \bar{b}_i \cdot s_i, \qquad \bar{b}_i \cdot u_i, \qquad \bar{b}_i \cdot v_i, \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{5. 45.}$$

4) Der Ressourcenaufwand aller Sektoren zur Realisierung der einzelnen Bestandteile des Endproduktes der Volkswirtschaft:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \cdot c_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \cdot s_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \cdot u_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \cdot v_i. \tag{5. 46.}$$

5) Die komplexe Ressourcenquote:

$$\frac{1}{\tilde{b}_j}. \tag{5. 47.}$$

(Letzte Aktualisierung: 15.11.08)