IV

Minimaleigenschaft des Input-Output-Modells

B. 4. 1.
In den Kapiteln II – III [vgl. S. 2. 3., B. 2. 7., S. 3. 12., B. 3. 14] wurde gezeigt, dass sie Verfahren VSA I – VSA II im gewissen Sinne die „beste Lösung“ des Problems (P. 2. 1’) liefern, da die Endnachfrage y mit der geringsten Gesamtproduktion x realisiert wird.
In diesem Kapitel wird diese so genannte „Minimaleigenschaft“ als selbstständige Theorie behandelt. Es wird dabei im Wesentlichen das Herangehen von P. Bod [vgl. Bod, Pétér: Nemlineáris ágazatközi kapcsolatok matematikai vizsgálata In: Szigma, 1975 (8), Nr. 4. S. 251 – 261] gewählt.
Hierzu werden einige Ergebnisse der indifferenten Optimierung verwendet.
Ausgangspunkt unserer Betrachtung ist das Problem (P. 2. 1’.), wobei die Aufwandsfunktion $b:\ R_+^n \to R_+^n$ die Bedingungen (B. 2.), (B. 7.), (B. 8.), (B. 15.) und (B. 16.) erfüllt.
Außerdem werden einige weitere Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen angeführt, die mit der „Minimaleigenschaft“ zusammenhängen.

D. 4. 1.
[Vgl.
Rheinboldt, Werner C. : On M-Functions and their Application to Nonlinear Gauß-Seidel Iterations and to Network Flows.
Bericht der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Bonn, Nr. 23, Birlinghaven 1969.
Auch in:
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1970, S. 247 – 307]

Eine Abbildung $F:\ D \subset R^n \to R^m$ heißt *isoton* (bzw. *antiton*) auf D, wenn

$$\left\langle \forall x^1, x^2 \in D : x^1 \le x^2 \right\rangle \quad \Rightarrow \quad F(x^1) \le F(x^2) \quad (\text{bzw. } F(x^1) \ge F(x^2)).$$

Die Abbildung F heißt *streng isoton* (bzw. *streng antiton*) auf D, wenn

$$\left\langle \forall x^1, x^2 \in D : x^1 < x^2 \right\rangle \quad \Rightarrow \quad F(x^1) < F(x^2) \quad (\text{bzw. } F(x^1) > F(x^2)).$$

D. 4. 2.
[[Vgl. Rheinboldt, Werner C. : Ebenda]
Eine Abbildung $F:\ D \subset R^n \to R^m$ heißt *invers isoton* auf D, wenn

$$\left\langle F(x^1) \le F(x^2), \forall x^1, x^2 \in D \right\rangle \quad \Rightarrow \quad x^1 \le x^2. \qquad (4.\ 1.)$$

Die Abbildung F heißt *streng invers* auf D, wenn

$$\left\langle F(x^1) < F(x^2), \forall x^1, x^2 \in D \right\rangle \quad \Rightarrow \quad x^1 < x^2.$$

B. 4. 2.
Der Begriff „invers isotone Abbildung" wurde erstmals in 1952 durch Collatz eingeführt [Vgl. Collatz, L.: Aufgaben monotoner Art. In: Arch. Math. 3, 1953, 366-376]. Er wird durch folgende Aussage gerechtfertigt:

L. 4. 1.

$$\left\langle F : D \subset R^n \to R^m \text{ ist invers isoton.} \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left\langle F \text{ ist injektiv } \wedge \; F^{-1} : F(D) \subset R^n \to R^m \text{ ist isoton.} \right\rangle$$

Beweis:
$(\Rightarrow)$:
Sei F invers isoton. Dann gilt:

$$\left\langle F(x^1) = F(x^2), \; \forall x^1, x^2 \in D \right\rangle \; \Rightarrow \; (x^1 \le x^2 \wedge x^1 \ge x^2), \qquad (\because \; (4.\,1.))$$

also $x^1 = x^2$ und damit ist F injektiv.
Sei nun

$$u^1, u^2 \in F(D), \quad x^1 := F^{-1}(u^1), \quad x^2 := F^{-1}(u^2).$$

Dann gilt

$$\left\langle F(x^1) = u^1 \le u^2 = F(x^2) \right\rangle \; \Rightarrow \; \left\langle F^{-1}(u^1) = x^1 \le x^2 = F^{-1}(u^2) \right\rangle.$$

$(\Leftarrow)$:
Sei F injektiv und F^{-1} isoton. Dann gilt:

$$\left\langle u^1 = F(x^1) \le F(x^2) = u^2 \right\rangle \; \Rightarrow \; \left\langle x^1 = F^{-1}(u^1) \le F^{-1}(u^2) = x^2 \right\rangle.$$

q. e .d.

D. 4. 3. (*Ortega*)
[Vgl. Ortega, J.: Notes on Mnotone Convergence, 1969, unveröffentlichte persönliche Notizen, zitiert in Rheinhold, Werner C.: On M-Functions…]
Eine Abbildung $F : D \subset R^n \to R^n$ heißt *außerhalb der Diagonalen antiton*, wenn für alle $x \in R^n$ die Funktionen

$$\varphi_{ij} : \; \{t \in R^1 \mid x + te^j \in D\} \to R^1, \qquad (4.\,2.)$$

$$\phi_{ij}(t) = f_i(x + te^j), \quad i \ne j, \; i, j = 1, 2, \ldots, n \,,$$

antiton sind.

Die Abbildung F heiß *diagonal isoton* (bzw. *diagonal streng isoton*), wenn für all $x \in R^n$ die Funktionen

$$\varphi_{ij} : \{t \in R^1 \mid x + te^j \in D\} \to R^1, \tag{4. 3.}$$

$$\phi_{ij}(t) = f_i(x + te^j), \quad i \neq j, \; i, j = 1, 2, ..., n,$$

isoton (bzw. streng isoton) sind.
Eine diagonal isotone Abbildung F ist *surjektiv diagonal isoton*, wenn $D = R^n$ ist und für alle $x \in R^n$ alle in (4. 3.) auftretenden Funktionen φ_{ii} surjektiv sind.

D. 4. 4. (*Tamir*)
[Vgl. Tamir, A.: Minimality and Complementary Properties Associated with $Z-$Functions and $M-$Functions. In: Mathematical Programming, 1974, S. 7-31].
Eine außerhalb der Diagonalen antitone Abbildung $F : D \subset R^n \to R^n$ heißt eine $Z-$ *funktion.*

D. 4. 5. (*Rheinholdt*)
Eine $z-$Funktion $F : D \subset R^n \to R^n$ ist *gleichzeitig eine* $M-$*Funktion*, wenn sie auch invers isoton ist.

B. 4. 3.
Die $M-$Funktionen sind Verallgemeinerungen von $M-$Matrizen [Vgl. D. 1. 2.]. Dies wird im nächsten Satz gezeigt:

S. 4. 1.
Eine Matrix F ist genau dann eine $M-$Matrix, wenn die zugehörige lineare Abbildung $F : R^n \to R^n$ eine $M-$Funktion ist.

Beweis:
Die Behauptung folgt trivialerweise aus D. 4. 2. und D. 4. 5.

B. 4. 4.
In der Arbeit [Reinholdt, Werner C.: On $M-$Functions…, Ebenda] werden weitere Eigenschaften von $M-$Funktionen hergeleitet. Unter anderem wird folgende Aussage bewiesen, die die Verallgemeinerung des bekannten Resultats darstellt, dass die Inverse einer $M-$Matrix streng positive Hauptdiagonalelemente besitzt.

S. 4. 2.
Sei $F : D \subset R^n \to R^n$ eine $M-$Funktion (und damit injektiv). Dann sind F und $F^{-1} : F(D) \subset R^n \to R^n$ diagonal streng isoton. Ist $F : R^n \to R^n$ eine surjektive $M-$Funktion, dann sind F und $F^{-1} : F(D) \subset R^n \to R^n$ surjektiv diagonal isoton.

S. 4. 3.
Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) in der Form

$$y_i = f_i(x), \; i = 1, 2, ..., n, \tag{4. 4.}$$

mit

$$f_i(x) = x_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x_j). \tag{4. 5.}$$

Die Funktionen $f_i(x),\ i = 1, 2, ..., n,$ sind $Z-$Funktionen.

Beweis:
Es gilt:

$$\begin{aligned} f_i(x + te^k) &= x_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} b_{ij}(x_j) - b_{ik}(x_k + t) \\ &\leq x_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} b_{ij}(x_j) - b_{ik}(x_k) \\ &= b_i(x). \end{aligned}$$

q. e. d.

B. 4. 5.
Die $Z-$Funktionen besitzen interessante Eigenschaften, auf die Tamir [Vgl. Tamir, A.: Minimality and Complementarity…] hingewiesen hat. Er hat eine zu $Z-$Funktionen gehörende sog. „Komplementäraufgabe“ untersucht und einen Algorithmus zu deren Lösung angegeben. Tamir hat gezeigt, dass für den Fall, dass eine Aufgabe zulässige Lösungen hat, auch eine sog. „Minimallösung“ existiert, welche gleichzeitig auch den Komplementaritätsbedingungen genügt.
Die Ergebnisse von Tamir verallgemeinern frühere von Cottle und Veinott erzielte Resultate, die sich auf die sog. „lineare Komplementäraufgabe“ beziehen.
{Vgl. Cottle, R. W.; Veinott, A. F. Jr.: Polyhedral Sets Having a Least Element. In: Mathematical Programming 1971, S. 238-249]
Im Folgenden wird gezeigt, dass die erwähnten Eigenschaften der $Z-$Funktionen aus einem im Jahre 1964 von Wintgen und von der internationalen Fachliteratur nicht genügend beachteten Satz folgen.
[Vgl. Wintgen, G.: Indifferente Optimierungsprobleme. In: Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie, Internationale Tagung – Berlin, Oktober 1964, Konferenzprotokolle, Teil II, Akademie-Verlag, Berlin, 1965. S. 3-6. und Wintgen, G.: Indifferente Optimierungsprobleme, In: Operations Research Verfahren VI, Herausgegeben von Rudolf Henn, Hans Paul Künzi, Horst Schubert, I. Oberwolfach-Tagung über Operations Research, 18-24 August 1968, Verlag Anton Hain, Meisenheim, S. 233-236]
Der Satz von Wintgen bezieht sich auf den von ihm eingeführten Begriff der „Indifferenz“.

D. 4. 6.
Mit (OP. 4. 1.) möge folgendes Optimierungsproblem bezeichnet sein:

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist ein } x^\circ \in R^n \text{ mit:} \\ z(\overset{\circ}{x}) := \max\limits_{(\min)}\{z(x) \mid x \in M\} \\ z(x) \in S := \{z(x) \mid R^n \to R\}. \end{cases} \qquad \text{(OP. 4. 1.)}$$

D. 4. 7.
Das Problem (OP. 4. 1.) ist in Bezug auf die Klasse der Zielfunktionen S *indifferent*, wenn

$$\exists\, x^0 \in L:\; Z(x^0) \underset{\leq}{\geq} Z(x),\; \forall x \in M \wedge \forall z(x) \in S.$$

D. 4. 8.
Mit (OP. 4. 2.) möge folgendes Optimierungsproblem bezeichnet sein:

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist ein } \tilde{x} \in R^n \text{ mit:} \\ z(\tilde{x}) := \max\limits_{(\min)}\{z(x) \mid x \in M\} \\ z(x) \in S' := \{z(x) \mid z(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i z_i(x),\; c_i \geq 0,\; i = 1, 2, \ldots, k\}. \end{cases} \qquad \text{(OP. 4. 2.)}$$

D. 4. 9.
Seien $x := (x_i) \in R^n$, $y := (y_i) \in R^n$. Wir definieren:

$$x \cup y := \left(\max(x_i; y_i)\right)$$

$$x \cap y := \left(\min(x_i; y_i)\right).$$

B. 4. 6.
Die in D. 4. 9. eingeführten Operationen $\cup$ und $\cap$ sind kommutativ und assoziativ und es gelten, wovon man sich leicht überzeugen kann, die Verschmelzungsgesetze:

$$x \cap (x \cup y) = x \qquad (4.\ 6.)$$

$$x \cup (x \cap y) = x \qquad (4.\ 7.)$$

Damit bildet jede Menge von Vektoren, die zu zwei Vektoren x und y die „Vereinigung“ $x \cup y$ und den „Durchschnitt“ $x \cap y$ enthält, einen Verband, in dem durch

$$x \cup y = x \quad \Leftrightarrow \quad x \geq y \qquad (4.\ 8.)$$

eine Halbordnung definiert ist, die mit der üblichen Halbordnung von Vektoren übereinstimmt.
[Vgl. z.B. Hermes, H. : Einführung in die Verbandstheorie, Berlin 1955]
In [Worobjow, N. N. : Extremale Matrizenalgebra (russisch), Doklady Akademii Nauk SSSR (1963) 1, S. 24 – 27] werden die Operationen $\cup$ und $\cap$ unter Benutzung der Symbole $\bar{m}$ und $\underline{m}$ eingeführt.

<u>D. 4. 10</u>
Gegeben sei eine Menge M und ein Verband V sowie eine Funktion

$$v : M \to V .$$

M heißt *in Bezug auf* v *nach oben abgeschlossen*, wenn es zu je zwei Elementen $r, s \in M$ in der Menge M ein Element t gibt, so dass

$$v(r) \cup v(s) = v(t)$$

gilt.
M heißt *in Bezug auf* v *nach unten abgeschlossen*, wenn es zu je zwei Elementen $r, s \in M$ in der Menge M ein Element t gibt, so dass

$$v(r) \cap v(s) = v(t)$$

gilt.

<u>S. 4. 4.</u> (*Wintgen*)
Gegebene sei das Optimierungsproblem (OP. 4. 2.). Die Zielfunktionen $z_i(x),\ i = 1, 2, ..., k,$ mögen auf M ein endliches Maximum (Minimum) annehmen.
Das Optimierungsproblem (OP. 4. 2.) ist in Bezug auf die Klasse der Zielfunktionen S' indifferent, wenn die Menge M in Bezug auf die Funktion

$$z(x) := (z_i(x)) \in R^k$$

nach oben (unten) abgeschlossen, d.h.

$$\forall x, y \in M \;\Rightarrow\; z(x) \cup z(y) \in Z(M)$$

$$(\forall x, y \in M \;\Rightarrow\; z(x) \cap z(y) \in Z(M))$$

Dabei ist $Z(M)$ das Bild von M in R^k.

Beweis: (*für das Minimierungsproblem*)
Wegen der Annahme des Satzes existiert ein $\tilde{x}_i$ mit

$$z_i(\tilde{z}^i) = \max(z_i(x)), \quad \forall x \in M,\ i = 1, 2, ..., k.$$

Sei nun

$$\bigcup_{i=1}^{k} Z(\tilde{x}^{i}) := (z_1(\tilde{x}^{i}), ..., z_k(\tilde{x}^{i}))^T \in Z(M).$$

Wegen der Abgeschlossenheit nach oben von M existiert ein $\overset{0}{x} \in M$ mit

$$Z(\overset{0}{x}) = (\max z_1(x), ..., \max z_k(x))^T, \quad \forall x \in M.$$

Daraus ergibt sich

$$Z(\overset{0}{x}) \geq Z(x), \quad \forall x \in M.$$

Es sei $z(x) \in S'$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z(\overset{0}{x}) &= \sum_{i=1}^{k} c_i z_i(\overset{0}{x}) \\ &\geq \sum_{i=1}^{k} c_i z_i(\overset{0}{x}) \\ &= z(x), \quad \forall x \in M. \end{aligned}$$

q. e .d.

B. 4. 7.

Es ist bemerkenswert, dass Wintgen [Wintgen, G.: Die Berechnung der vollen Aufwendungen bei Lagerbeständen. In: Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, Gesellschafts- und Sprachwissenschaftliche Reihe XIII (1964) 5, S. 659 – 664] zunächst anhand des Spezialfalls eines statischen Verflechtungsmodells auf das Problem der indifferenten Optimierung hinwies. Er hat gezeigt, dass die Lösung x des Problems

$$x = Ax + y - s \qquad \text{(P. 4. 1.)}$$

$s \in R_+^n$: Vektor des Lagerbestands

eine Lösung des linearen Optimierungsproblems

$$\min\left\{c^T x \mid (E - A)x \geq y - s,\ x \geq 0\right\} \qquad \text{(OP. 4. 3.)}$$

ist, wobei $c \in R_+^n$ beliebig gewählt werden kann. Wintgen ging zwar in [Wintgen, G.: Die Berechnung der vollen Aufwendungen bei Lagerbeständen. In: Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, Gesellschafts- und Sprachwissenschaftliche Reihe XIII (1964) 5, S. 659 – 664] von der Annahme aus, dass $A \geq 0$ und $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1$ für mindestens ein $i = 1, 2, ...n$ gilt, hat aber bereits in [Wintgen, G.: Indifferente Optimierungsprobleme. In: Mathematik und Kybernetik…] darauf hingewiesen, dass die genannte Eigenschaft auch unter der schwächeren Voraussetzung $A \geq 0$ und a_{ii} vorliegt. Dies ist eine Folge des nachstehenden allgemeinen Satzes:

<u>S. 4. 5.</u>
Enthält im linearen Optimierungsproblem

$$\min\{c^T x \mid Bx \geq b,\ x \geq 0\} \qquad \text{(OP. 4. 4.)}$$

mit $B^{(m,n)}$, $b \in R^m$ die Matrix B in jeder Zeile ein nichtnegatives Element, während alle übrigen Elemente der Zeile nichtpositiv sind, so ist dieses Optimierungsproblem indifferent in Bezug auf die Menge aller linearen Zielfunktionen mit nichtnegativen Koeffizienten, falls es überhaupt lösbar ist.

Beweis:
Die n Zielfunktionen $z(x) = x_i$ nehmen wegen $x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots n$, ein Minimum aus

$$M : \{x \mid Bx \geq b,\ x \geq 0\}$$

an. Es ist also nur zu zeigen, dass für zwei zulässige Programme $x, y \in M$

$$u := x \cap y \in M$$

gilt:

Das Ungleichungssystem $Bx \geq b,\ x \geq 0$ besteht aus endlich vielen Ungleichungen, die alle auf die Form

$$b_i x_i \geq \sum_{i \neq j} b_j x_j + b_i, \qquad b_i,\ b_j \geq 0,$$

gebracht werden können.

Gilt gleichzeitig

$$b_i y_i \geq \sum_{i \neq j} b_j y_j + b_i,$$

so bleiben die Ungleichungen bestehen, wenn man zuerst auf den rechten Seiten die x_j bzw. y_j durch $u_j := \min(x_j, y_j)$ ersetzt. Sodann kann man auch auf den linken Seiten x_i bzw. y_i durch u_i ersetzen und von zwei entstehenden identischen Ungleichungen nur eine aufführen. So erhält man gerade das Ungleichungssystem

$$Bu \geq b, \quad u \geq 0.$$

q. e. d.

<u>S. 4. 5.</u> (*Bód*)
Das lineare Optimierungsproblem

$$\min\left\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\right\} \qquad \text{(OP. 4. 5.)}$$

ist indifferent in Bezug auf alle linearen Zielfunktionen mit nichtnegativen Koeffizienten dann und- falls Entartung ausgeschlossen werden kann- nur dann, wenn die Matrix A eine zulässige Basis B^0 besitzt, in der sämtliche Spalten von A, die nicht zu B gehören, nicht positive Koordinaten enthalten.

Beweis:
[Vgl. Bód, P.: Bemerkungen zu einem Satz von G. Wintgen (ungarisch), MTA III, Osztály Közleményei 16 (1966)].

<u>D. 4. 11.</u> (*Maximalelement* bzw. *Minimalelement*)
$\tilde{x}$ heißt ein *Maximalelement* (bzw. ein *Minimalelement*) der Menge $H \subset R^n$, wenn

$$\tilde{x} \in H \;\wedge\; \tilde{x} \geq x, \quad \forall x \in H$$

(bzw.

$$\tilde{x} \in H \;\wedge\; \tilde{x} \leq x, \quad \forall x \in H\,)$$

gilt.

<u>B. 4. 8.</u>

Ist das Problem (OP. 4. 2.) indifferent, so ist $Z(\hat{x})$ ein Maximalelement (ein Minimalelement) von $Z(M)$.

<u>D. 4. 12.</u> (*Komplementarität*)
Gegeben seien die Abbildungen

$$f : R^n_+ \to R^n_+$$

und $b \in R^n$. Mit (P. 4. 2.) möge folgendes *Komplementaritätsproblem* bezeichnet sein:

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist ein Vektor } x, \text{ der folgenden Bedingungen genügt:} \\ i)\; f(x) + b \geq 0, \quad x \geq 0 \\ ii)\; x^T\,(f(x) + b) = 0 \end{cases} \qquad \text{(P. 4. 2.)}$$

Ein Vektor x heißt zulässig, wenn er *i)* erfüllt. Eine zulässige Lösung ist *komplementär,* falls sie auch der Bedingung *ii)* genügt.

L. 4. 2.
Sei

$$M := \{x \mid f(x) + b \geq 0,\ x \geq 0\} \neq \emptyset,$$
$$|M| > 1, \qquad f : R_+^n \to R, \qquad b \in R^n.$$

Ist f eine $Z-$Funktion, dann ist die Menge M in Bezug auf die Operation $\cap$ abgeschlossen, d.h.

$$x, y \in M \;\Rightarrow\; x \cap y \in M.$$

Beweis:

$$x, y \in M \;\Rightarrow\; f(x_i) + b_i \geq 0 \;\wedge\; f_i(y) + b_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Sei nun $z_i := x \cap y$ .Wegen $x \geq 0$ hat man:

$$y \geq 0 \;\Rightarrow z \geq 0.$$

Wir setzen $z_i := x_i$ und definieren eine Punktfolge

$$z := v^{(0)},\ v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)} =: x$$

mit

$$v^{(k)} := v^{(k-1)} + t_k e^{(k)}$$

und

$$t_k := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad z_k = x_k \\ x_k - y_k & \text{für} \quad x_k = y_k \end{cases}$$

Es gilt wegen D. 4. 3. – D. 4. 4. für alle $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$f_i(v^{(k)}) = f_i(v^{(k-1)} + t_k e^{(k)})$$
$$\leq f_i(v^{(k-1)}),$$

$$f_i(x) \leq f_i(z),$$

$$f_i(x) + b_i \geq 0 \;\Rightarrow\; f_i(z) + b_i \geq 0,$$

$$f(z) + b \geq 0,$$

d.h. $z \in M$.

q. e. d.

L. 4. 3.
Gegeben sei die in L. 4. 2. definierte Mange $M \neq \emptyset$. Ist f eine steige Z-Funktion, dann besitzt M ein Minimalelement.

Beweis:
Betrachtet sei folgende Familie von nichtlinearen Optimierungsproblemen:

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist ein } \bar{x} \in R^n \text{ mit} \\ z(\bar{x}) = \min z(x) \\ x \in M := \{x \mid f(x) + b \geq 0,\ x \geq 0\} \\ z(x) \in S'' := \left\{ z(x) \mid z(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z_i(x),\ c_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n\} \right\} \\ z_i(x) := x_i \end{cases} \qquad \text{(OP. 4. 6.)}$$

Die Funktionen $z_i(x),\ i = 1, 2, ...n,$ stellen also eine identische Abbildung dar:

$$Z(x) = Ex.$$

Wegen L. 4. 2. gilt nun

$$x, y \in M \Rightarrow Z(x) \cap Z(y) = x \cap y \in y \in Z(M) = M.$$

Aus der Stetigkeit von f folgt, dass M abgeschlossen ist. Im Falle, dass M auch beschränkt ist, nimmt jede der Funktionen $z_i(x)$ ihr endliches Minimum in M an. Somit sind die Voraussetzungen des Satzes S. 4. 4. erfüllt. Es gibt also ein $\hat{x} \in M$, in dem alle nichtnegativen linearen Funktionen ihr Minimum annehmen, d.h. $\hat{x}$ ist ein Minimalelement von M. Dies folgt nun zum einen aus den im Zusammenhang mit S. 4. 4. gemachten Bemerkungen, wonach $Z(\hat{x})$ ein Minimalelement der Menge $Z(M)$ ist und da jetzt $Z(M) = M$ ist, ist auch $Z(\hat{x}) = \hat{x}$. Andererseits folgt aus der Tatsache

$$x \leq y \Leftrightarrow x^T x \leq c^T y \text{ für } \forall c \in R_+^n,$$

dass jeder Punkt einer Menge, in dem jede beliebige nichtnegative lineare Funktion ein Minimum annimmt, ein Minimalelement dieser Menge ist und umgekehrt.

Falls M nun nicht beschränkt ist, betrachten wir ein beliebiges $\tilde{x} \in M$.

Wegen $M \neq \emptyset$ ist die Existenz von $\tilde{x}$ gesichert, und wir können die oben angeführten Gedankengänge auf die Menge

$$M' := \left\{ x \mid x \in M,\ x \leq \tilde{x} \right\} \subset M$$

anwenden.
Offensichtlich ist $M' \neq \emptyset$ und in Bezug auf die Operation $\cap$ abgeschlossen und beschränkt. Ein Minimalelement von M' ist gleichzeitig ein Minimalelement von M.

q. e. d.

L. 4. 4.

Ist $\hat{x}$ ein Minimalelement der Menge M und f eine stetige $Z-$Funktion, dann ist $\hat{x}$ eine Komplementärlösung.

Beweis:

Nehmen wir an, dass $\hat{x}$ die Komplementaritätsbedingung nicht erfüllt. Dann

$$\exists i: \ \hat{x}(f_i(\hat{x})+b_i)>0$$

oder

$$\hat{x}>0 \ \wedge \ f_i(\hat{x})+b_i>0.$$

Für ein beliebig kleines $\delta>0$ ist

$$\tilde{x}:=\hat{x}-\delta e^i \geq 0.$$

Es gilt nun:

$$F_{ji}(t)=f_j((\hat{x}-\delta e^i)+te^i)$$

$$\leq f_j(\hat{x}-\delta e^i).$$

Für $t:=\delta$ hat man:

$$F_{ji}(\delta)=f_j(\hat{x})$$

$$\leq f_j(\hat{x}-\delta e^i)$$

$$=f_j(\tilde{x}),$$

$$f_j(\hat{x})+b_j\geq 0 \quad \Rightarrow \quad f_j(\tilde{x})+b_j\geq 0, \quad j=1,2,...,n;\ j\neq i.$$

Falls notwendig kann δ noch verallgemeinert werden, und es gilt

$$f_i(\tilde{x})+b_i=f_i(\hat{x}-\delta e^i)\geq 0.$$

Damit haben wir gleichzeitig $\tilde{x}\in M$ und $\tilde{x}_i<\hat{x}_i$, was der Annahme widerspricht, dass $\hat{x}$ ein Minimalelement der Menge M ist

q.e.d.

S. 4. 5.
Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.)in der Form (4. 4.), wobei die Aufwandsfunktion $b: R_+^n \to R_+^n$ die Bedingungen (B. 3.), (B. 7.), (B. 15.) und (B. 16.) erfüllt. Ferner möge folgende Voraussetzung gelten:

$$\exists \text{ ein } x^+ \in R_+^n : f(x^+) > 0.$$

Der zugehörige Endnachfragevektor sei mit $\hat{y} > 0$ bezeichnet.
Sei

$$M_{\hat{y}} := \left\{ x \mid f(x) - \hat{y} \geq 0 \right\} \neq \emptyset.$$

Dann gilt:

A. $\forall \hat{y} \in R_+^n \setminus \{0\} \; \exists \hat{x} \in R_+^n : f(\hat{x}) = \hat{y}$

B. Die Lösung $\hat{x}$ ist ein Minimalelement von $M_{\hat{y}}$.

Beweis (von A und B zusammen):
Da $f(x)$ gemäß S. 4. 3. eine $Z-$Funktion ist, hat $M_{\hat{y}}$ laut L. 4. 3. ein Minimalelement; sei dies mit $\hat{x}$ bezeichnet. Wir müssen noch zeigen, dass $\hat{x}$ eine Lösung des Problems (P. 2. 1'.) ist:

Laut L. 4. 4. ist $\hat{x}$ eine Komplementärlösung, d. h. $\hat{x}^T(f(\hat{x}) - \hat{y}) = 0.$ Wir zeigen, dass $\hat{x}^T > 0$ ist:

Nehmen wir umgekehrt an, dass $\hat{x}^T = 0$ für mindestens ein *i* gilt. Dann würde die die Menge $M_{\hat{y}}$ bestimmende Bedingung lauten

$$\hat{x}_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\hat{x}_j) - x_i < 0.$$

Somit wäre $\hat{x}$ nicht zulässig. Daher gilt $\hat{x}^T > 0$ und folglich

$$f(\hat{x}) - \hat{y} = 0.$$

q. e. d.

B. 4. 9.
Die „Minimaleigenschaft" des Problems (P. 2. 1'.) unter den Bedingungen (B. 3.), (B. 7.), (B. 15.) und (B. 16.) garantiert, dass die geforderte Endnachfrage y mit der (Komponentenweise) geringsten Gesamtproduktion x realisiert wird. Eine solche Produktion ist auch kostenminimal, falls eine monoton wachsende Kostenfunktion als Güterkriterium gewählt wird. Hierzu können die Primärressourcenfunktionen dienen [Vgl. Kapitel VI] Es ist aber auch denkbar, von einer „Funktion der gesellschaftlichen Produktionskosten" auszugehen. Zum Beispiel schlägt Bód [Vgl. Bód, Pater: Nemlineáres…] folgende Funktion vor:

$$\varphi: R^n_+ \to R^n_+$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$E1: \quad \varphi(0) = 0$$

$$E2: \quad \varphi(x) > 0 \quad \text{für } \|x\| > 0$$

$$E3: \quad \forall x^1, x^2 \in R^n_+ : x^1 \le x^2 \ \Rightarrow \varphi(x^1) \le \varphi(x^2).$$

S. 4. 6.

Ist $\hat{x}$ das Minimalelement von $M_{\hat{y}}$ und sind in $\hat{x}$ sämtliche Regularitätsvoraussetzungen erfüllt, dann gilt

$$\frac{df}{dx}(\hat{x}) \in M_M .$$

Beweis:

Da $\hat{x}$ das Minimalelement von $M_{\hat{y}}$ ist, stellt es eine Minimallösung folgender nichtlinearer Optimierungsprobleme dar:

$$Min\left\{x_i \mid \hat{y} - f(x) \le 0,\ x \in R^n_+\right\}, \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad \text{(OP. 4. 7.)}$$

In S. 4. 5. wurde gezeigt, dass $\hat{x} > 0$ ist. Da sämtliche Regularitätsvoraussetzungen erfüllt sind, gelten die notwendigen Kuh-Tucker-Optimalitätsbedingungen. Unter anderem gilt die Bedingung, dass der Gradient der Zielfunktion in $\hat{x}$ eine nichtpositive Linearkombination der Gradienten der aktiven Nebenbedingungen ist. In $\hat{x}$ sind aber sämtliche Nebenbedingungen des Problems (OP. 4. 7.) aktiv. Daher gilt:

$$e^i = -grad\left(\hat{y} - f(\hat{x})\right) \cdot \hat{u}_i$$

$$= gradf(\hat{x}) \cdot \hat{u}_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Mit

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \hat{u}_n \end{pmatrix} \ge 0$$

erhält man

$$E = \frac{df}{dx}(\hat{x}) \geq 0,$$

$$U = \left(\frac{df}{dx}(\hat{x})\right)^{-1} \geq 0.$$

q. e. d.

S. 4. 7.
Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.), wobei die Aufwandsfunktion $b: R_+^n \to R_+^n$ die Bedingungen (B. 3.), (B. 7.), (B. 8.), (B. 15.), (B. 16.) und (B. 18.) erfüllt.
Dann ist das Problem (P. 2. 1.) eindeutig global lösbar.

Beweis:
Aus der Konkavitätsvoraussetzung (B. 18.) für b folgt die Konvexität von $f(x)$.
Nehmen wir im Gegensatz zur Behauptung an, dass $\hat{x}$ und $\tilde{x}$, $\hat{x} \neq \tilde{x}$ Lösungen des Problems (P. 2. 1'.) für ein festes $\hat{y}$ sind:

$$f(\hat{y}) = \hat{y} \quad \wedge \quad f(\tilde{x}) = \hat{y}, \tag{4. 10.}$$

wobei $\hat{x}$ die Minimallösung dieses Problems darstellt:

$$\hat{x} \leq \tilde{x}. \tag{4. 11.}$$

Es gilt wegen der Konvexität von $f(x)$:

$$\left(\frac{df}{dx}(\hat{x})\right)\left(\tilde{x} - \hat{x}\right) \leq f(\tilde{x}) - f(\hat{x})$$

$$= 0, \qquad (\because (4.10.))$$

$$\tilde{x} \leq \hat{x}, \qquad (\because (S.4.6.))$$

$$\tilde{x} = \hat{x}.$$

B. 4. 10.
In S. 4. 7. lässt sich die Konvexitätsvoraussetzung für $f(x)$ dadurch schwächen, dass man stattdessen fordert: $f(x)$ ist in $\hat{x} \in R_+^n$ lokal quasikonvex.

(Letzte Aktualisierung: 03.06.09)