III

Verfahren zur Lösung nichtlinearer Input-Output-Modelle

B. 3. 1.
Im Kapitel II wurde das Verfahren VSA I:

$$\text{i) } x^{(0)} := y$$
$$\text{ii) } x^{(\nu)} := b(x^{(\nu-1)}) + y, \quad \nu \in N, \qquad \text{(VSA I)}$$

zur Lösung des Problems (P. 2. 1'.) vorgeschlagen und dessen wichtigsten Eigenschaften im Zusammenhang mit der Lösbarkeit des genannten Problems untersucht. In diesem Kapitel werden zunächst weitere Eigenschaften dieses Verfahrens *aus numerischer Sicht* und insbesondere in Verbindung mit der Kontraktionsbedingung erörtert (Vgl. B. 2. 10, B. 2. 11., S. 2. 7., S. 2. 8.).

S. 3. 1.
Gegeben sei

$$b:\ D \subset R^n \to R^n,$$

$$K_0 := \left\{ x \mid x \in R^n, \left\| x - x^0 \right\| \le \delta \right\} \subset D, \quad x^0 \in D,\ \delta > 0$$

und b auf K_0 kontrahierend mit dem Kontraktionsfaktor $\lambda < 1$.
Ferner sei

$$f:\ id - b$$

und

$$K_1 := \left\{ y \mid y \in R^n, \left\| y - f(x^0) \right\| \le (1-\lambda)\delta \right\}.$$

Dann gibt es für alle $y \in K_1$ ein eindeutig bestimmtes $x^* \in K_0$ mit

$$f(x^*) = y,$$

und die Folge

$$x^{(\nu)} := b(x^{(\nu-1)}) + y, \quad \nu \in N$$

konvergiert gegen x^*

Beweis:
Für ein festes $y \in K_1$ sei die Abbildung $g: \ D \subset R^n$ definiert durch

$$g(x) := b(x) + y$$

$$= x - (f(x) - y), \ \forall x \in D.$$

Dann ist g trivialerweise auf K_0 kontrahierend. Für alle $x \in K_0$ gilt dann:

$$\left\| g(x) - x^0 \right\| \le \left\| g(x) - g(x^0) \right\| + \left\| g(x^0) - x^0 \right\|$$

$$\le \lambda \left\| x - x^0 \right\| + \left\| f(x^0) - y \right\|$$

$$\le \lambda\delta + (1-\lambda)\delta$$

$$= \delta_1,$$

d. h. es gilt $g(K_0) \subset K_0$. Nach Satz S. 2. 7. hat g dann einen eindeutig bestimmten Fixpunkt x^* in K_0:

$$x^* = g(x^*)$$

$$= b(x^*) + y,$$

also

$$f(x^*) = y,$$

und die Folge $x^{(\nu)} := b(x^{(\nu-1)}) + y, \ \nu \in N$, konvergiert gegen x^*.

q. e. d.

<u>B. 3. 2.</u>
Der Satz S. 3. 1. gewährleistet die Eindeutigkeit der Lösung nur in K_0, nicht aber in D.

<u>B. 3. 3.</u>
Der Kontraktionssatz S. 2. 7. hat die angenehme Eigenschaft, dass er eine leicht berechenbare Fehlerabschätzung liefert, die beim $\nu -$ten Schritt des Iterationsverfahrens die Abweichung vom Grenzwert in Abhängigkeit vom letzten Schritt und der Kontraktionskonstanten λ ausdrückt:

<u>S. 3. 2.</u>
Unter den Voraussetzungen des Satzes S. 2. 7. gilt für die Folge (2. 18.) die Fehlerabschätzung:

$$\left\| x^{(\nu)} - x^* \right\| \le \frac{\lambda}{1-\lambda} \left\| x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)} \right\| \tag{3. 1.}$$

$$\le \frac{\lambda^{\nu}}{1-\lambda} \left\| g(x^0) - x^{(0)} \right\|, \quad \nu \in N,$$

wobei $\lambda < 1$ die Kontraktionskonstante der Abbildung g ist.

Beweis:
Es gilt für ein $\nu \ge 1$ [vgl. den Beweis vom Satz S. 2. 7.]:

$$\left\| x^{(\nu)} - x^* \right\| \le \left\| x^{(\nu)} - x^{(\nu+\vartheta)} \right\| + \left\| x^{(\nu+\vartheta)} - x^* \right\|$$

$$\le \frac{\lambda}{1-\lambda} \left\| x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)} \right\| + \left\| x^{(\nu+\vartheta)} - x^* \right\|.$$

Durch den Grenzübergang $\vartheta \to \infty$ folgt daraus:

$$\left\| x^{(\nu)} - x^* \right\| \le \frac{\lambda}{1-\lambda} \left\| x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)} \right\|.$$

Jetzt folgen die behaupteten Ungleichungen unter Benutzung von

$$\left\| x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)} \right\| = \left\| g(x^{(\nu)}) - g(x^{(\nu-1)}) \right\|$$

$$\le \lambda \left\| x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)} \right\|.$$

q.e.d.

<u>B. 3. 4.</u>
In den nachfolgenden Aussagen befassen wir uns mit einer Sensitivitätsanalyse des statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodells mit kontrahierender Aufwandsfunktion. Zunächst wenden wir uns der Fragestellung zu, was mit der Lösung passiert, wenn man vom Endnachfragevektor y auf einen anderen Endnachfragevektor $\tilde{y}$ übergeht. Ist die Lösung stabil? Das heißt ändert sich der Vektor der Gesamtproduktion nur wenig, wenn der Endnachfragevektor wenig verändert wird?

<u>S. 3. 3.</u>
Sei $b:\ D \subset R^n \to R^n$ kontrahierend mit $\lambda < 1$ und $f:\ D \to R^n$ definiert durch

$$f(x) := x - b(x),\ \forall x \in D.$$

Dann ist $f:\ D \to f(D)$ bijektiv, f^{-1} stetig und es gilt:

$$\left\| f^{-1}(y) - f^{-1}(\tilde{y}) \right\| \le \frac{1}{1-\lambda} \left\| y - \tilde{y} \right\|, \quad \forall y, \tilde{y} \in f(D).$$

Beweis:
Für alle $y \in f(D)$ gilt $x = b(x) + y$ für ein $x \in D$, d.h. x ist Fixpunkt der kontrahierenden Abbildung $b + y$. Nach dem Beweis von S. 2. 7. ist dieser Fixpunkt aber eindeutig. Damit folgt die Injektivität von f, und $f : D \to f(D)$ ist bijektiv.

Weiter gilt für alle $x, \tilde{x} \in D$:

$$\| f(x) - f(\tilde{x}) \| = \| x - \tilde{x} - (b(x) - b(\tilde{x})) \|$$

$$\geq \Big\| \| x - \tilde{x} \| - \| b(x) - b(\tilde{x}) \| \Big\|$$

$$\geq \| x - \tilde{x} \| - \lambda \| x - \tilde{x} \|$$

$$= (1 - \lambda) \cdot \| x - \tilde{x} \| .$$

Seien $y, \tilde{y} \in f(D)$ und $x, \tilde{x} \in D$ mit $f(x) = y$ und $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Dann folgt:

$$\| f^{-1}(y) - f^{-1}(\tilde{y}) \| = \| x - \tilde{x} \|$$

$$\leq \frac{1}{1 - \lambda} \| f(x) - f(\tilde{x}) \|$$

$$= \frac{1}{1 - \lambda} \| y - \tilde{y} \| .$$

Dies ist die behauptete Abschätzung, und aus ihr folgt die Stetigkeit von f^{-1}.

q.e.d.

<u>B. 3. 6.</u>
Man kann weiter fragen, was geschieht, wenn man von der kontrahierenden Aufwandsfunktion b zu der Aufwandsfunktion $\tilde{b}$ übergeht, oder noch allgemeiner von der Iterationsfunktion $g(x) = b(x) + y$ zu $\tilde{g}(x) = \tilde{b}(x) + \tilde{y}$. Die Abbildung $\tilde{g}$ braucht hierbei nicht notwendig kontrahierend zu sein. Der folgende Satz beschreibt das Verhalten der Folgenglieder:

<u>S. 3. 4.</u>
Sei $D \subset R_+^n$ und $g : D \to D$ eine kontrahierende Abbildung mit der Kontraktionskonstanten $\lambda < 1$. Sei $\tilde{g} : D \to D$, und es gelte für ein $\varepsilon > 0$ und alle $x \in D$:

$$\| g(x) - \tilde{g}(x) \| < \varepsilon .$$

Seien $\bar{x}^{(0)}, \bar{\bar{x}}^{(0)} \in D$, $\bar{x}^{(0)} \leq \bar{\bar{x}}^{(0)}$, $\bar{x}^{(\nu)} = g(\bar{x}^{(\nu-1)})$ und $\bar{\bar{x}}^{(\nu)} = g(\bar{\bar{x}}^{(\nu-1)})$ für $\nu \in N$.

Dann gilt für alle $\nu \in N$:

$$\| \bar{x}^{(\nu)} - \bar{\bar{x}}^{(\nu)} \| \leq \varepsilon \sum_{j=0}^{\nu-1} \lambda^j .$$

Beweis:
Wir beweisen die Abschätzung durch Induktion über ν:
Der Fall $\nu = 1$ ist klar.
Die Behauptung sei für ν richtig. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\| \bar{x}^{(\nu)} - \bar{\bar{x}}^{(\nu)} \| &\leq \| g(\bar{x}^{(\nu)}) - g(\bar{\bar{x}}^{(\nu)}) \| + \| g(\bar{\bar{x}}^{(\nu)}) - \tilde{g}(\bar{\bar{x}}^{(\nu)}) \| \\
&\leq \lambda \| \bar{x}^{(\nu)} - \bar{\bar{x}}^{(\nu)} \| + \varepsilon \\
&\leq \lambda \varepsilon \sum_{j=0}^{\nu-1} \lambda^j + \varepsilon \\
&= \varepsilon \sum_{j=0}^{\nu} \lambda^j .
\end{aligned}$$

q.e.d.

B. 3. 7.

Falls $\tilde{g}$ einen Fixpunkt hat (z.B. falls $\tilde{g}$ kontrahierend ist), können wir den Abstand der Lösungen mit folgendem Satz abschätzen:

S. 3. 5.

Sei $D \subset R_+^n$ und $g: D \to D$ kontrahierend mit $\lambda < 1$. Sei $\tilde{g}: D \to D$ und gelte für ein $\varepsilon > 0$ und alle $x \in D$:

$$\| g(x) - \tilde{g}(x) \| \leq \varepsilon .$$

Sei $\bar{x}^*$ Fixpunkt von g und $\bar{\bar{x}}^*$ Fixpunkt von $\tilde{g}$. Dann gilt:

$$\| \bar{x}^* - \bar{\bar{x}}^* \| \leq \frac{\varepsilon}{1-\lambda} .$$

Beweis:
Trivialerweise gilt für alle $\nu \in N$ wegen der Kontraktionseigenschaft von g und S. 3. 4.:

$$\| \bar{x}^* - \bar{\bar{x}}^* \| \leq \| g(\bar{x}^*) - g(\bar{\bar{x}}^*) \| + \| g(\bar{\bar{x}}^*) - \tilde{g}(\bar{\bar{x}}^*) \|$$

$$\leq \lambda^{\nu} \| \bar{x}^* - \bar{\bar{x}}^* \| + \varepsilon \sum_{j=0}^{\nu-1} \lambda^j .$$

Beim Grenzübergang $\nu \to \infty$ geht der erste Term gegen Null und der zweite gegen $\frac{\varepsilon}{1-\lambda}$.

q.e.d.

<u>B. 3. 8.</u>

Wenn wir mit der Abbildung $\tilde{g}$ statt mit g iterieren, so benötigen wir eine Abschätzung für den Fehler, den wir dabei machen. Dies liefert der folgende Satz:

<u>S. 3. 6.</u>

Sei $D \subset R_+^n$ und $g: D \to D$ kontrahierend mit $\lambda < 1$. Sei ferner $\tilde{g}: D \to D$, und es gelte für ein $\varepsilon > 0$ und alle $x \in D$:

$$\| g(x) - \tilde{g}(x) \| \leq \varepsilon .$$

Sei x^* Fixpunkt von g und $\bar{\bar{x}}^{(\nu)} = \tilde{g}(\bar{\bar{x}}^{(\nu-1)}),\ \nu \in N,$ das Iterationsverfahren von $\tilde{g}$.
Dann gilt

$$\| x^* - \bar{\bar{x}}^{(\nu)} \| \leq \frac{1}{1-\lambda} (\varepsilon + \lambda^{\nu} \| \bar{\bar{x}}^{(0)} - \tilde{g}(\bar{\bar{x}}^{(0)}) \|, \quad \forall \nu \in N.$$

Beweis:
Sei $\bar{x}^{(0)} = \bar{\bar{x}}^{(0)}$ und $x^{(\nu)} = g(x^{(\nu-1)})$ für $\nu \in N$. Dann folgt wegen S. 3. 2. und S. 3. 4. für $\nu \in N$:

$$\begin{aligned}
\| x^* - \bar{\bar{x}}^{(\nu)} \| &\leq \| x^* - \bar{x}^{(\nu)} \| + \| \bar{x}^{(\nu)} - \bar{\bar{x}}^{(\nu)} \| \\
&\leq \frac{\lambda^{\nu}}{1-\lambda} \| \bar{\bar{x}}^{(0)} - g(\bar{\bar{x}}^{(0)}) \| + \varepsilon \sum_{j=0}^{\nu-1} \lambda^j \\
&\leq \frac{\lambda^{\nu}}{1-\lambda} \| \bar{\bar{x}}^{(0)} - \tilde{g}(\bar{\bar{x}}^{(0)}) \| + \frac{\lambda^{\nu}}{1-\lambda} \| \tilde{g}(\bar{\bar{x}}^{(0)}) - g(\bar{\bar{x}}^{(0)}) \| + \varepsilon \sum_{j=0}^{\nu-1} \lambda^j \\
&\leq \frac{\lambda^{\nu}}{1-\lambda} \| \bar{\bar{x}}^{(0)} - \tilde{g}(\bar{\bar{x}}^{(0)}) \| + \frac{\lambda^{\nu}}{1-\lambda} \varepsilon + \varepsilon \sum_{j=0}^{\nu-1} \lambda^j \\
&= \frac{\lambda^{\nu}}{1-\lambda} \| \bar{\bar{x}}^{(0)} - \tilde{g}(\bar{\bar{x}}^{(0)}) \| + \varepsilon \left(\frac{\lambda^{\nu}}{1-\lambda} + \frac{1-\lambda^j}{1-\lambda} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda^{\nu}}{1-\lambda} \| \bar{\bar{x}}^{(0)} - \tilde{g}(\bar{\bar{x}}^{(0)}) \| + \varepsilon \frac{1}{1-\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^{\nu}}{1-\lambda} \left(\varepsilon + \lambda^{\nu} \| \bar{\bar{x}}^{(0)} - \tilde{g}(\bar{\bar{x}}^{(0)}) \| \right).$$

q.e.d.

B. 3. 9.

In den nächsten Sätzen geben wir Bedingungen an, aus denen folgt, dass eine Abbildung kontrahierend ist.
Wir beginnen mit einem Satz, der Auskunft über die Lösungsmöglichkeit eines statischen Verflechtungsmodells mit nichtlinearen Aufwandsfunktionen gibt, dessen Iterationsverfahren $g \equiv b + y$ zu einer kontrahierenden Abbildung „ähnlich“ ist.

S. 3. 7

Sei $D \subset R^n$ abgeschlossen, $g: D \to R^n$ eine Abbildung mit $h: D \to D$. Sei ferner $g(D) \subset D$ ein Homomorphismus, so dass die Abbildung $h^{-1} \circ g \circ h$ kontrahierend ist.
Dann hat g genau einen Fixpunkt x^* und das Iterationsverfahren

$$x^{(\nu)} := g(x^{(\nu)}), \ \nu \in N \cup \{0\},$$

konvergiert für ein beliebiges $x^{(0)} \in D$ gegen x^*.

Beweis:
Die Abbildung $h^{-1} \circ g \circ h$ ist kontrahierend und bildet D in sich ab, besitzt also nach dem Kontraktionssatz S. 2. 7. einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $\tilde{x}^*$. Aus $h^{-1} \circ g \circ h(\tilde{x}^*) = \tilde{x}^*$ folgt $g(h(\tilde{x}^*)) = h(\tilde{x}^*)$. $h(\tilde{x}^*)$ ist also der eindeutig bestimmte Fixpunkt von g. Das Iterationsverfahren

$$\tilde{x}^{(\nu+1)} := h^{-1} \circ g \circ h(\tilde{x}^{(\nu)}), \quad \nu \in N \cup \{0\},$$

konvergiert für alle $\tilde{x}^{(0)} \in D$ gegen $\tilde{y}^*$. Weil h Homomorphismus ist, konvergiert dann auch

$$\begin{aligned} x^{(\nu+1)} &:= h(\tilde{x}^{(\nu+1)}) \\ &= g(h(\tilde{x}^{(\nu)})) \\ &= g(x^{(\nu)}) \end{aligned}$$

für alle $x^{(0)} = h(\tilde{x}^{(0)}) \in D$ gegen $x^* := h(\tilde{x}^*)$.

q.e.d.

B. 3. 10.
Die Voraussetzungen des Satzes S. 3. 7. sind speziell erfüllt, wenn der Homomorphismus h durch eine invertierbare, nichtnegative Diagonalmatrix gegeben ist. Analog wie im Kapitel I kann man den Übergang von g zu $h^{-1} \circ g \circ h$ als Wahl neuer Maßeinheiten für die Produkte deuten.

S. 3. 8.
Sei $D \subset R^n$ konvex und die Abbildung $b:\ D \to R^n$ stetig differenzierbar (B. 15.).
Dann gilt:

$$\left\langle \left\| \frac{db}{dx}(x) \right\| \leq \lambda < 1, \forall x \in D \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \text{(B. 10.).}$$

Beweis:
Nach einem Mittelwertsatz gilt für alle $x^1, x^2 \in D$:

$$\| b(x^1) - b(x^2) \| \leq \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \left\| \frac{db}{dx}(x^1 + \alpha(x^2 - x^1)) \right\| \cdot \left\| x^1 - x^2 \right\|,$$

woraus nach Voraussetzung folgt

$$\| b(x^1) - b(x^2) \| \leq \lambda \left\| x^1 - x^2 \right\|, \quad \lambda < 1.$$

q.e.d.

B. 3. 11.
Nach S. 3. 8. muss man also erreichen, dass eine Norm der Jacobischen Matrix der Aufwandsfunktion kleiner oder gleich einer reellen Zahl $\lambda < 1$ ist.

S. 3. 9.
Sei $D \subset R^n$ konvex und die Abbildung $b:\ D \to R^n$ stetig differenzierbar. Ferner gebe es ein $\tilde{x} \in D$, so dass

$$\left(E - \frac{db}{dx}(\tilde{x}) \right) \in M_M$$

ist und

$$\frac{db}{dx}(\tilde{x}) \geq \frac{db}{dx}(x) \geq 0, \quad \forall x \in D,$$

gilt.
Dann ist b kontrahierend.

Beweis:
Wegen $\left(E - \frac{db}{dx}(\tilde{x}) \right) \in M_M$ existiert eine nichtsinguläre, nichtnegative Diagonalmatrix P, so dass gilt

$$\left\| P^{-1} \frac{db}{dx}(\tilde{x})P \right\|_\infty < 1.$$

Aus (3. 2.) folgt wegen $P, P^{-1} \geq 0$

$$P^{-1} \frac{db}{dx}(\tilde{x})P \geq P^{-1} \frac{db}{dx}(x)P \geq 0, \ \forall x \in D.$$

Damit erhält man:

$$1 > \left\| P^{-1} \frac{db}{dx}(\tilde{x})P \right\|_\infty$$

$$\geq \left\| P^{-1} \frac{db}{dx}(x)P \right\|_\infty, \quad \forall x \in D.$$

Damit haben wir eine Norm gefunden, in der die Voraussetzung von S. 3. 8. erfüllt ist. Die Abbildung b ist also kontrahierend.

q.e.d.

B. 3. 12.
In B. 2. 8. wurde bereits angedeutet, dass das Verfahren der sukzessiven Approximation VSA nicht nur für $x^{(0)} := y$.

S. 3. 10
Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) mit (B. 7.) und (B. 8.). Zur Lösung dieses Problems sei folgendes Iterationsverfahren (das Verfahren der sukzessiven Approximation II – VSA II) vorgeschlagen:

$$\text{i)} \ \tilde{x}^{(0)} := 0$$

$$\text{ii)} \ \tilde{x}^{(\nu)} := b(\tilde{x}^{(\nu-1)}) + y, \quad \nu \in N. \tag{VSA II}$$

Unter der Bedingung

$$\exists \text{ ein } x^+ \in R_+^n : f(x^+) \geq y \tag{B. 25.}$$

gilt:

$$\left\langle \{\tilde{x}^{(\nu)}\}, \ \nu \in N \cup \{0\} : \text{ VSA II ist konvergent} \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left\langle \text{(P.2.1'.) ist global lösbar und } \tilde{x}^* := \lim_{\nu \to \infty} \tilde{x}^{(\nu)} \text{ ist e i n e Lösung von (P. 2. 1'.)} \right\rangle$$

Beweis:
($\Rightarrow$):
Analog dem Beweis von S. 2. 2. ($\Rightarrow$).

($\Leftarrow$):
Dieser Teil wird durch zwei Behauptungen bewiesen:

Behauptung 1:
Es gilt

$$\tilde{x}^{(\nu+1)} \geq \tilde{x}^{(\nu)} \geq 0, \quad \nu \in N \cup \{0\}.$$

Beweis der Behauptung 1 durch Induktion:

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{(1)} &= b(0) + y && (\because \text{(VSA II, i))} \\ &\geq 0 \\ &= \tilde{x}^{(0)}. \end{aligned}$$

Induktionsschritt:
Mit der Induktionshypothese

$$\tilde{x}^{(\nu)} \geq \tilde{x}^{(\nu-1)} \geq 0, \quad \nu \in N \cup \{0\},$$

folgt

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{(\nu+1)} - \tilde{x}^{(\nu)} &= b(\tilde{x}^{(\nu)}) - b(\tilde{x}^{(\nu-1)}) && (\because \text{(VSA II))} \\ &\geq 0, && (\because \text{(B. 7.))} \end{aligned}$$

d.h.

$$\tilde{x}^{(\nu+1)} \geq \tilde{x}^{(\nu)} \geq 0, \quad \nu \in N \cup \{0\}.$$

Behauptung 2:
Es gilt

$$\tilde{x}^{(\nu)} \leq \tilde{x}^{*}, \quad \nu \in N \cup \{0\}.$$

Beweis der Behauptung 2 durch Induktion:

Induktionsanfang:

$$\tilde{x}^{(0)} = 0 \leq x^+ \qquad (\because x^+ \in R^n_+)$$

Induktionsschritt:

Mit der Induktionshypothese

$$\tilde{x}^{(\nu)} \leq x^+$$

folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}^{(\nu+1)} &= b(\tilde{x}^{(\nu)}) + y \\
&\leq b(\tilde{x}^{(\nu)}) + f(x^+) && (\because \text{ (B. 25.)}) \\
&= b(\tilde{x}^{(\nu)}) + x^+ - b(x^+) && (\because f(x^+) = x^+ - b(x^+)) \\
&\leq x^+. && (\because \text{(B. 7.)})
\end{aligned}$$

Damit ist Behauptung 2 bewiesen.
Da eine monoton wachsende nach oben beschränkte Folge konvergiert, ist mit diesen beiden Behauptungen Teil ($\Leftarrow$) bewiesen.

q. e. d.

S. 3. 11.
Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) mit (B. 7.) und (B. 8.) und (B. 25.). Zur Lösung dieses Problems sei folgendes Iterationsverfahren (das Verfahren der sukzessiven Approximation III – VSA III) vorgeschlagen:

$$\begin{aligned}
&\text{i) } \bar{x}^{(0)} := x^+ \ (x^+ \in R^n_+ : f(x^+) \geq y) \\
&\text{ii) } \bar{x}^{(\nu)} := b(\bar{x}^{(\nu-1)}) + y, \quad \nu \in N.
\end{aligned} \qquad \text{(VSA II)}$$

Es gelte:

$$\left\langle \{\bar{x}^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}: \text{ VSA III ist konvergent} \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left\langle \text{(P.2.1'.) ist global lösbar und } \bar{x}^* := \lim_{\nu\to\infty} \bar{x}^{(\nu)} \text{ ist e i n e Lösung von (P. 2. 1'.)} \right\rangle.$$

Beweis:
$(\Rightarrow)$:
Analog dem Beweis von S. 2. 2. $(\Rightarrow)$.

$(\Leftarrow)$:
Dieser Teil wird durch zwei Behauptungen bewiesen:

Behauptung 1:
Es gilt

$$\bar{x}^{(\nu+1)} \le \bar{x}^{(\nu)}.$$

Beweis der Behauptung 1 durch Induktion:

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned}
\bar{x}^{(1)} &= b(x^+) + y \\
&\le b(x^+) + f(x^+) && (\because \text{ (B. 25.)}) \\
&= b(x^+) + x^+ - b(x^+) && (\because f(x^+) = x^+ - b(x^+)) \\
&= x^+.
\end{aligned}$$

Induktionsschritt:
Mit der Induktionshypothese

$$\bar{x}^{(\nu)} \le \bar{x}^{(\nu-1)}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\bar{x}^{(\nu+1)} &= b(\bar{x}^{(\nu)}) + y \\
&\le b(\bar{x}^{(\nu-1)}) + y && (\because \text{ (B. 7)}) \\
&= \bar{x}^{(\nu)}.
\end{aligned}$$

Damit ist Behauptung 1 bewiesen.

Behauptung 2:
Es gilt

$$\bar{x}^{(\nu)} \le \bar{x}^*, \quad \nu \in N \cup \{0\}.$$

Beweis der Behauptung 2 durch Induktion:

Wir zeigen (indirekt), dass

$$x^{+} \geq \bar{x}^*; \qquad \bar{x}^* := b(\bar{x}^*) + y$$

gilt:

Induktionsanfang:

Es gelte entgegen der Behauptung

$$x^{+} < \bar{x}^*.$$

Dann gilt wegen (B. 7.)

$$b(x^{+}) \leq b(\bar{x}^*). \qquad (3.\ 3.)$$

Andererseits gilt wegen $y \leq x^{+} - b(x^{+})$:

$$\begin{aligned} \bar{x}^* &= b(\bar{x}^*) + y \\ &\leq b(\bar{x}^*) + x^{+} - b(x^{+}) \\ &\leq x^{+}, \qquad (\because\ (3.\ 3.)) \end{aligned}$$

entgegen der Annahme. Daher die Behauptung.

Induktionsschritt:

Mit der Induktionshypothese

$$\bar{x}^* \geq x^* \qquad (3.\ 4.)$$

folgt:

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(\nu+1)} &= b(\bar{x}^{(\nu)}) + y \\ &= b(\bar{x}^{(\nu)}) + f(\bar{x}^*) \\ &= b(\bar{x}^{(\nu)}) + \bar{x}^* - b(\bar{x}^*) \\ &\geq \bar{x}^*. \qquad (\because\ (3.\ 4.),\ (B.\ 7.)) \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung 2 bewiesen.

Da eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergiert, ist Teil $(\Rightarrow)$ auch bewiesen.

q.e.d.

B. 3. 13.
Bedingung (B. 25.) besagt: Für eine Gesamtproduktion wird mindestens eine Endnachfrage realisiert.

B. 3. 14.
Bedingung (B. 25.) ist zwar für die Konvergenz der Verfahren VSA II und VSA III unerlässlich, wird aber beim Verfahren VSA II nur für den Nachweis der Beschränktheit der Folge $\{\tilde{x}^{(\nu)}\}, \nu \in N \cup \{0\}$, benötigt. Dagelegen braucht man sie beim Verfahren VSA III auch für den Nachweis der Monotonie der Folge $\{\bar{x}^{(\nu)}\}, \nu \in N \cup \{0\}$.

S. 3. 12.

$$\langle \text{(P. 2. 1'.) hat eine mehrdeutige Lösung für ein } y \in R_+^n \rangle$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left\langle \lim_{\nu \to \infty} \tilde{x}^{(\nu)} := \tilde{x}^* \leq \bar{x}, \quad \bar{x}: \text{ eine beliebige Lösung für dieses } y \right\rangle.$$

Beweis:
Es gilt:

$$\bar{x} = b(\bar{x}) + y \tag{3. 5.}$$

$$\geq y. \qquad (\because\ b(\bar{x}) \in R_+^n) \tag{3. 6.}$$

Wir zeigen nun, dass $\bar{x}$ eine obere Schranke der Nach VSA II definierten Folge $\{\bar{x}^{(\nu)}\}, \nu \in N \cup \{0\}$ ist (Induktion):
Es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{(1)} &= b(0) + y \\ &\leq b(\bar{x}) + y && (\because\ (3.\ 5.), (B.\ 7.)) \\ &= \bar{x}. && (\because\ (3.\ 5.)) \end{aligned}$$

Es gelte die Induktionshypothese

$$\tilde{x}^{(\nu)} \leq \bar{x}. \tag{3. 7.}$$

Dann gilt:

$$\tilde{x}^{(\nu+1)} \leq b(\tilde{x}^{(\nu)}) + y \qquad (3.\ 8.)$$

$$\leq b(\bar{x}) + y \qquad (\because\ (3.\ 5.), (B.\ 7.))$$

$$= \bar{x}. \qquad (\because\ (3.\ 5.))$$

Es gilt ferner

$$\lim_{\nu\to\infty} \tilde{x}^{(\nu)} \leq \lim_{\nu\to\infty} \bar{x}, \qquad (\because\ (3.\ 5.))$$

d. h.

$$\tilde{x}^* \leq \bar{x}.$$

q. e. d.

B. 3. 15.
Nach Satz S. 3. 12. besitzt VSA II die gleiche „Minimaleigenschaft“ wie VSA I. [vgl. S. 2. 3. und B. 2. 7.]

S. 3. 13.
Gegeben sei das Problem (P. 2. 1.’). Es gelten die Bedingungen (B. 7.), (B. 8.) und (B. 25.).

$$\left\langle \begin{array}{l} \text{(P. 2. 1'.) hat eine mehrdeutige Lösung im Intervall } \left[0,\ x^+\right] \\ \text{für ein festes } y \in R_+^n \end{array} \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \lim_{\nu\to\infty} \approx{x}^{(\nu)} := \approx{x}^* \geq x, \quad x: \text{ eine beliebige Lösung} \\ \text{von (P. 2. 1'.) für dieses } y \end{array} \right\rangle.$$

Beweis:
Aus dem Beweis von S. 3. 11., Teil $(\Leftarrow)$, Behauptung 2 folgt für alle $x \in R_+^n,\ x \leq x^*$ mit $f(x) = y$:

$$\overset{\approx}{x}^{(\nu)} \geq x, \quad \forall \nu \in N \cup \{0\}.$$

Daraus folgt für alle $x \in R_+^n$ mit $x \leq x^+$ mit $f(x) = y$:

$$\overset{\approx}{x}^* := \lim_{\nu\to\infty} \overset{\approx}{x}^{(\nu)} \geq x.$$

q.e.d.

B. 3. 16.
Durch die Kombination der Iterationsverfahren VSA I und VSA III bzw. VSA II und VSA III erhält man für alle Gesamtproduktionen $x \in \left[0,\ x^{+}\right]$ mit $f(x) = y$ die Abschätzungen

$$x^{(\nu)} \le x \le \overset{\approx(\nu)}{x}, \quad \forall \nu \in N \cup \{0\} \tag{3. 9.}$$

bzw.

$$\overset{\sim(\nu)}{x} \le x \le \overset{\approx(\nu)}{x}, \quad \forall \nu \in N \cup \{0\}. \tag{3. 10.}$$

Die Abschätzungen (3. 9.) bzw. (3. 10.) sind für die praktische Durchführung der Iteration von besonderem Interesse, wenn es im Intervall $\left[0,\ x^{+}\right]$ nur eine einzige Gesamtproduktion x existiert, die die vorgegebene Endnachfrage realisiert. Dann gilt nämlich:

$$\lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)} = x = \lim_{\nu\to\infty} \overset{\approx(\nu)}{x} \tag{3. 11.}$$

bzw.

$$\lim_{\nu\to\infty} \overset{\sim(\nu)}{x} = x = \lim_{\nu\to\infty} \overset{\approx(\nu)}{x}. \tag{3. 12.}$$

B. 3. 17.
Im Folgenden werden die Verfahren VSA I – III modifiziert, um eine Konvergenzbeschleunigung zu erzielen. Es lässt sich nämlich zeigen, dass VSA I – III genau dann konvergieren, wenn die modifizierten Verfahren MVSA – III konvergieren. Beide haben dann denselben Grenzwert, aber in Bezug auf die Konvergenzgeschwindigkeit sind die Verfahren MVSA I – III die besseren.

S. 3. 14.
Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) mit (B. 7.) und (B. 8.). Zur Lösung dieses Problems sei folgendes Iterationsverfahren (das *modifizierte Verfahren der sukzessiven Approximation I – MVSA I*) vorgeschlagen:

$$\begin{aligned} &\text{i)}\ z_i^{(0)} := y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ &\text{ii)}\ z_i^{(\nu)} := y_i + b_i(z_1^{(\nu)} \dots z_{i-1}^{(\nu)}\ z_i^{(\nu-1)} \dots z_n^{(\nu-1)})^T, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \nu \in N. \end{aligned} \tag{VSA II}$$

Dann gilt:

A. Die durch MVSA I definierte Folge ist monoton wachsend und konvergent.
B. $z^{(\nu)} \ge x^{(\nu)}, \quad \nu \in N \cup \{0\}$
C. $\lim_{\nu\to\infty} z^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)}$

Beweis:
A.
Dieser Teil wird durch zwei Behauptungen bewiesen:

Behauptung 1:
Es gilt

$$z^{(\nu+1)} \geq z^{(\nu)}, \quad \nu \in N \cup \{0\}.$$

Beweis der Behauptung 1 durch Induktion:

Induktionsanfang:

$$z_i^{(1)} = y_i + b_i(z_1^{(1)} \ldots z_{i-1}^{(1)}\ z_i^{(0)} \ldots z_n^{(0)})^T$$

$$\geq y_i = x_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (\because\ y_i \in R_+^1;\ b_i(z) \in R_+^1)$$

Induktionsschritt:

Mit der Induktionshypothese

$$z^{(\nu)} \geq z^{(\nu-1)}$$

folgt durch eine zweite Induktion über i:

$$(i = 1): \quad z_1^{(\nu+1)} = y_1 + b_1(z^{(\nu)})$$

$$\geq y_1 + b_1(z^{(\nu-1)}) \qquad (\because\ (\text{B. 7.}))$$

$$= z_1^{(\nu)};$$

$$(i = i+1): \quad z_{i+1}^{(\nu+1)} = y_{i+1} + b_{i+1}(z_1^{(\nu+1)} \ldots z_{i-1}^{(\nu+1)}\ z_i^{(\nu)} \ldots z_n^{(\nu)})^T$$

$$\geq y_{i+1} + b_{i+1}(z_1^{(\nu)} \ldots z_i^{(\nu)}\ z_{i+1}^{(\nu-1)} \ldots z_n^{(\nu-1)})^T$$

$$(\because\ z_j^{(\nu+1)} \geq z_j^{(\nu)},\ j = 1, 2, \ldots, i, \wedge z_j^{(\nu)} \geq z_j^{(\nu-1)},\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$= z_{i+1}^{(\nu)}.$$

Daraus folgt:

$$z_i^{(\nu+1)} \geq z_i^{(\nu)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

und damit

$$z^{(\nu+1)} \geq z^{(\nu)}.$$

Behauptung 1 ist damit bewiesen.

Behauptung 2:

Sei

$$x^* := \lim_{\nu \to \infty} x^{(\nu)}$$

(wobei durch S. 2. 2. die Existenz von x^* gesichert ist).

Dann gilt für alle $\nu \in N \cup \{0\}$:

$$z^{(\nu)} \leq x^*.$$

Beweis der Behauptung 2 durch Induktion:

Induktionsanfang:

$$z^{(0)} = y$$

$$\leq x^*.$$

Induktionsschritt:

Mit der Induktionshypothese

$$z^{(\nu)} \leq x^*$$

folgt durch eine zweite Induktion über i :

$$(i = 1): \quad z_1^{(\nu+1)} = y_1 + b_1(z^{(\nu)})$$

$$\leq y_1 + b_1(x^*) \qquad (\because \text{ (B. 7.)})$$

$$= x^* \qquad (\because f(x^*) = x^* - b(x^*) = y)$$

$$(i = i+1): \quad z_{i+1}^{(\nu+1)} = y_{i+1} + b_{i+1}\left(z_1^{(\nu+1)} \ldots z_i^{(\nu+1)} z_{i+1}^{(\nu)} \ldots z_n^{(\nu)}\right)^T$$

$$\leq y_{i+1} + b_{i+1}(x^*) \qquad (\because z_j^{(\nu+1)} \leq x^*,\ j = 1, 2, \ldots, i \wedge z_j^{(\nu)} \leq x_j^*,\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$= x_{i+1}^*.$$

Damit folgt $z^{(\nu+1)} \leq x^*$ und Behauptung 2 ist bewiesen.

Da eine monoton wachsende nach oben beschränkte Folge konvergent ist, ist mit diesen Beiden Behauptungen Teil A bewiesen.

B.
Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang:

$$z^{(0)} = y \geq y = x^{(0)}.$$

Induktionsschritt:

Mit der Induktionshypothese $z^{(\nu)} \ge x^{(\nu)}$ folgt für $i = 1, 2, ..., n$:

$$z_i^{(\nu+1)} = y_i + b_i(z_i^{(\nu+1)} ... z_{i-1}^{(\nu+1)} z_i^{(\nu)} ... z_n^{(\nu)})$$

$$\ge y_i + b_i(z_1^{(\nu)} ... z_n^{(\nu)}) \qquad (\because \text{A, Behauptung 1})$$

$$= y_i + b_i(z^{(\nu)})$$

$$\ge y_i + b_i(x^{(\nu)}) \qquad (\because x^{(\nu)} \le z^{(\nu)})$$

$$= x_i^{(\nu+1)}.$$

Damit ist Teil B bewiesen.

C.
Aus Teil A, Behauptung 2 folgt:

$$z^{(\nu)} \le \lim_{\nu \to \infty} x^{(\nu)}.$$

Damit gilt

$$\lim_{\nu \to \infty} z^{(\nu)} \le \lim_{\nu \to \infty} x^{(\nu)}.$$

Aus Teil B folgt

$$\lim_{\nu \to \infty} z^{(\nu)} \ge \lim_{\nu \to \infty} x^{(\nu)}.$$

Damit ist Teil C bewiesen.

q. e. d.

<u>S. 3. 15.</u>
Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) mit (B. 7.), (B. 8.) und (B. 25.).
Zur Lösung dieses Problems sei folgendes Iterationsverfahren (das *modifizierte Verfahren der sukzessiven Approximation II – MVSA II*) vorgeschlagen:

i) $z_i^{(0)} := 0, \quad i = 1, 2, ..., n,$

(VSA II)

ii) $z_i^{(\nu)} := y_i + b_i(z_1^{(\nu)} ... z_{i-1}^{(\nu)} \; z_i^{(\nu-1)} ... z_n^{(\nu-1)})^T, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad \nu \in N.$

Dann gilt:

A. Die durch (MVSA II) definierte Folge ist monoton wachsend und konvergent.

B. $\tilde{z}^{(\nu)} \geq \tilde{x}^{(\nu)}, \quad \nu \in N \cup \{0\}$

C. $\lim\limits_{\nu\to\infty} \tilde{z}^{(\nu)} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \tilde{x}^{(\nu)}$

Beweis:
Analog dem Beweis von S. 3. 14.

S. 3. 16
Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) mit (B. 7.), (B. 8.) und (B. 25.). Zur Lösung dieses Problems sei folgendes Iterationsverfahren ((das *modifizierte Verfahren der sukzessiven Approximation III – MVSA III*) vorgeschlagen:

$$\text{i)}\quad \overset{\approx}{z}_i^{(0)} := x_i^+, \quad i = 1,2,\dots,n, \text{ mit } f(x^+) \geq y$$

(VSA II)

$$\text{ii)}\quad \overset{\approx}{z}_i^{(0)} := y_i + b_i(\overset{\approx}{z}_i^{(0)} \dots \overset{\approx}{z}_{i-1}^{(\nu)}\ \overset{\approx}{z}_i^{(\nu-1)} \dots \overset{\approx}{z}_n^{(\nu-1)})^T, \quad i = 1,2,\dots,n; \quad \nu \in N.$$

Dann gilt:

D. Die durch (MVSA III) definierte Folge ist monoton wachsend und konvergent.

E. $\overset{\approx}{z}^{(\nu)} \geq \overset{\approx}{x}^{(\nu)}, \quad \nu \in N \cup \{0\}$

F. $\lim\limits_{\nu\to\infty} \overset{\approx}{z}^{(\nu)} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \overset{\approx}{x}^{(\nu)}$

Beweis:
Analog dem Beweis von S. 3. 14.

B. 3. 18.
Die Verfahren MVSA I – MVSA III stellen Verallgemeinerungen des Gauß-Seidelschen Verfahrens zur Lösung von linearen Gleichungssystemen dar.
Es ist licht zu sehen, dass die Reihenfolge der Nummerierung der Sektoren für die Konvergenzgeschwindigkeit der Verfahren MVSA I – III von entscheidender Bedeutung ist.
Im Falle einer sog. „zyklenfreien" Aufwandsfunktion lässt sich durch geeignete Nummerierung stets erreichen, dass

$$b_{ij}(x_j) = 0, \text{ für } i \leq j;\ j = 1,2,\dots,n,$$

gilt. Für diesen Spezialfall kann man die gesuchte Gesamtproduktion nach MVSA I – III nach einem Schritt erhalten.

S. 3. 17.
Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) mit (B. 3.), (B. 15.) – (B. 17.) und (B. 18.) (bzw. (2. 29.)).
Sei $\frac{df}{dx}(0) \in M_M$.
Dann ist das Problem (P. 2. 1'.) eindeutig global lösbar und das Newtonsche Verfahren

$$x^{(\nu)} := x^{(\nu-1)} - \left(\frac{df}{dx}(x^{(\nu-1)}) \right)^{-1} \left(f(x^{(\nu-1)}) - y \right), \quad \nu \in N \tag{NV}$$

konvergiert für jedes $x^{(0)} \in R_+^n$ gegen die Lösung x^* des Problems (P. 2. 1.')
Dabei gilt

$$x^{(\nu)} \geq x^{(\nu-1)} \geq x^*, \ \forall \nu \in N.$$

Beweis:

Sei $y \in R_+^n$ und $\tilde{f} : R^n \to R^n$ eine Fortsetzung von f , die analog zu der im Beweis von S. 2. 16. konstruiert ist. Sei $t : R^n \to R^n$ definiert durch $t(x) = \tilde{f}(x) - y.$
Dann ist t stetig differenzierbar und konvex auf R^n . Wegen

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx}(x) &= \frac{d\tilde{f}}{dx}(x) = E - \frac{d\tilde{b}}{dx}(x) \\ &\geq E - \frac{db}{dx}(0) \\ &= \frac{df}{dx}(0), \quad \forall x \in R^n, \end{aligned}$$

folgt, dass $\frac{dt}{dx}(x)$ für alle $x \in R^n$ eine $M-$Matrix ist. Also ist $\frac{dt}{dx}(x)$ nicht singulär und $\left(\frac{dt}{dx}(x) \right)^{-1} \geq 0$ für alle $x \in R^n$. Der Satz S. 2. 16. sichert die Existenz eines $x^* \in R_+^n$ mit $f(x) = y$ mit $t(x) = 0.$
Unter diesen Voraussetzungen ist die Lösung $x \in R_+^n$ eindeutig bestimmt und das Newtonverfahren

$$x^{(\nu)} := x^{(\nu-1)} - \left(\frac{dt}{dx}(x^{(\nu-1)}) \right)^{-1} t(x^{(\nu-1)}), \quad \nu \in N \tag{NV'}$$

konvergiert für jedes $x^{(0)} \in R_+^n$ gegen x^*.
Weiter gilt

$$x^{(\nu)} \geq x^{(\nu+1)} \geq x^*, \ \forall \nu \in N,$$

weswegen die obige Iterationsvorschrift (NV') folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$x^{(\nu)} := x^{(\nu-1)} - \left(\frac{dt}{dx}(x^{(\nu-1)}) \right)^{-1} \left(f(x^{(\nu-1)}) - y \right), \quad \nu \in N .$$

q. e. d.

S. 3. 18.
Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) bzw. das Problem

$$x = b_y(x) \tag{2. 34.}$$

mit

$$b_y(x) = b(x) + y, \quad y \in R_+^n, \tag{2. 32.}$$

wobei die in (S. 2. 20.) angegebenen Bedingungen gelten mögen.
Ferner möge $b'(x)$ monoton (fallend) von x abhängen.
Zur Lösung des Problems (2. 33.) sei folgendes Verfahren (das *modifizierte Newtonverfahren – MNVI*) vorgeschlagen:

$$\begin{aligned} &\text{i) } x^{(0)} := x^0 > 0: \ b_y(x^0) \le \lambda x^0 \\ &\text{ii) } x^{(\nu)} := b_y(x^{(\nu-1)}) + b'(x^0)(x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}), \quad \nu \in N. \end{aligned} \tag{MNV}$$

Dann ist die nach (MNV) konstruierte Folge $\{x^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$ monoton wachsend und konvergiert gegen die eindeutige Lösung x^* der Gleichung (2. 34.)

Beweis:
Die in S. 2. 20. angegebenen Bedingungen sichern die Existenz der eindeutigen Lösung von (P. 2. 1'.)
Es wird nun gezeigt, das für den Spektralradius der Abbildung $b'(x)$ gilt:

$$r\left[b'(x^0)\right] < 1.$$

Man hat nämlich

$$\begin{aligned} \lambda x^0 &\ge b(x^0) && (\because\ (\text{B. 19.})) \\ &\ge b'(x^0)x^0 && (\because\ (2.\ 31.)) \end{aligned}$$

Daraus resultiert [Vgl. Krasnoselski, M. A. u. a.: Näherungsverfahren zur Lösung von Operatorgleichungen, Akademie-Verlag, Berlin 1973]:

$$\begin{aligned} r\left[b'(x^0)\right] &\le \lambda \\ &< 1. \end{aligned} \tag{3. 13.}$$

Die Ungleichung (3. 13.) sichert, dass die Folge $\{x^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$ durch die Formel (MNV) eindeutig bestimmt ist.
Sei nun $x^{(0)} \ge 0,\ x^{(0)} = t_0 x^0$, wobei t_0 die Bedingung (2. 26.) erfüllt. Es kann leicht bewiesen werden [Vgl. den Beweis von S. 2. 18. $(\Rightarrow)$ (2. 35.)], dass

$$b_y(x^{(0)}) \le x^{(0)} \tag{3. 14.}$$

gilt.
Setzt man in (MNV ii) $\nu = 1$ ein, so folgt:

$$x^{(1)} = b_y(x^{(0)}) + b'(x^0)\left(x^{(1)} - x^{(0)}\right)$$

$$\le x^{(0)} + b'(x^0)(x^{(1)} - x^{(0)}), \qquad (\because (3.\ 14.))$$

d.h.

$$(E - b'(x^0))(x^{(1)} - x^{(0)}) \le 0.$$

Da $b'(x^0)$ ein positiver Operator ist und unter Berücksichtigung von (3. 13.) gilt nun:

$$x^{(1)} \le x^{(0)}. \tag{3. 15.}$$

Ferner gilt:

$$x^* = b_y(x^*)$$

$$\le b_y(x^{(0)}) + b'(x^{(0)})(x^* - x^{(0)}) \qquad (\because (2.\ 33.))$$

$$= b_y(x^{(0)}) + b'(x^{(0)})(x^{(1)} - x^{(0)}) + b'(x^{(0)})(x^* - x^{(0)})$$

$$= x^{(1)} + b'(x^{(0)})(x^* - x^{(0)})$$

$$\le x^{(1)} + b'(x^{(0)})(x^* - x^{(1)}), \qquad (\because (3.\ 15.))$$

d.h.

$$(E - b'(x^{(0)}))(x^* - x^{(1)}) \le 0. \tag{3. 16.}$$

Man hat ferner

$$b(x^{(0)}) + y \le x^{(0)}, \qquad (\because (3.\ 14.)) \tag{3. 17.}$$

d.h.

$$x^{(0)} > b(x^{(0)}) \qquad (\because (3.\ 17.))$$

$$\ge b'(x^{(0)})x^{(0)}.$$

Aus der letzten Ungleichung folgt, wie beim Beweis von S. 2. 20., dass

$$r\left[b'(x^{(0)})\right] < 1$$

ist woraus unter Berücksichtigung von (3. 16.)

$$x^* \leq x^{(1)}$$

resultiert.
Man erhält ferner:

$$x^{(2)} = b_y(x^{(1)}) + b'(x^0)(x^{(2)} - x^{(1)})$$

$$\leq b_y(x^{(0)}) + b'(x^{(0)})(x^{(1)} - x^{(0)}) + b'(x^0)(x^{(2)} - x^{(1)})$$

$$\leq b_y(x^{(0)}) + b'(x^0)(x^{(1)} - x^{(0)}) + b'(x^0)(x^{(2)} - x^{(1)})$$

$$= x^{(1)} + b'(x^0)(x^{(2)} - x^{(1)})$$

$$(E - b'(x^0))(x^{(2)} - x^{(1)}) \leq 0\,,$$

$$x^{(2)} \leq x^{(1)}\,.$$

Analog gilt:

$$x^* = b_y(x^*)$$

$$\leq b_y(x^{(1)}) + b'(x^{(1)})(x^* - x^{(1)})$$

$$= b_y(x^{(1)}) + b'(x^{(1)})(x^{(2)} - x^{(1)}) + b'(x^{(1)})(x^* - x^{(2)})$$

$$\leq b_y(x^{(1)}) + b'(x^0)(x^{(2)} - x^{(1)}) + b'(x^1)(x^* - x^{(2)})$$

$$= x^{(2)} + b'(x^1)(x^* - x^{(2)}),$$

$$(E - b'(x^{(0)}))(x^* - x^{(2)}) \leq 0\,. \qquad (3.\ 18.)$$

Wegen $x^* \leq x^{(1)}$ hat man $b'(x^{(1)}) \leq b'(x^*)$ und daher [Vgl. Krasnoselski, M. A. u. a.: Näherungsverfahren zur Lösung von Operatorgleichungen, Akademie-Verlag. Berlin 1973]:

$$r\left[b'(x^{(1)})\right] \leq r\left[b'(x^*)\right].$$

Aus

$$x^* = b_y(x^*)$$

$$= b(x^*) + y$$

$$> b(x^*)$$

$$\geq b'(x^*)x^*$$

und unter Berücksichtigung der Unzerlegbarkeit von b' erhält man

$$r[b'(x^{(1)})] < 1.$$

Damit gilt:

$$r[b'(x^{(1)})] \leq r[b'(x^*)]$$

$$< 1$$

und

$$x^* \leq x^{(2)}, \qquad (\because \ (3.18.))$$

also

$$x^* \leq x^{(2)} \leq x^{(1)} \leq x^{(0)}.$$

Durch analoge Überlegungen lässt sich nach der Methode der vollständigen Induktion zeigen, dass die Folge $\left\{x^{(\nu)}\right\},\ \nu \in N \cup \{0\}$, monoton fallend ist und eine untere Schranke x^* besitzt.

Aus der Monotonie und Beschränktheit der Folge $\left\{x^{(\nu)}\right\},\ \nu \in N \cup \{0\}$, folgt deren Konvergenz gegen ein x^*. Geht man in (MNV ii) zum Grenzwert über ($\nu \to \infty$), erhält man $x^* = b_y(x^*)$. Wegen $x^* \geq 0$ und der eindeutigen Lösbarkeit von (P. 2. 1.') unter den gegebenen Bedingungen [Vgl. S. 2. 20.] ist dies die gesuchte Lösung.

q. e. d.

B. 3. 19.

Bim Verfahren MNV kann man wie beim Beweis von S. 3. 18. angeführt wurde, als Anfangsbedingung $x^{(0)} = t_0 x^0$ wählen, wobei $x^0 > 0$ der Bedingung

$$b(x^0) \leq \lambda x^0,\ \lambda \in [0,\ 1],\ y \leq t_0 (1-\lambda) x^0.\ t_0 > 0$$

genügen muss.

B. 3. 20.

Die Iterationsvorschrift des modifizierten Newtonschen Verfahrens lässt sich folgendermaßen umschreiben:

$$x^{(\nu)} := \left(E - b'(x^0)\right)^{-1} \left(b_y(x^{(\nu-1)}) - b'(x^0)x^{(\nu-1)}\right),\ \nu \in N. \qquad (3.\ 19.)$$

Damit hat man die Methode der sukzessiven Approximation $x^{(\nu)} := g(x^{(\nu-1)}),\ \nu \in N,$ auf die Abbildung

$$g(x) := \left(E - b'(x^0)\right)^{-1}\left(b_y(x) - b'(x^0)x\right) \qquad (3.\ 20.)$$

anzuwenden.

S. 3. 19.
Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) bzw. (2. 34.) mit (2. 32.). Ferner seien die in S. 3. 18. gemachten Voraussetzungen erfüllt.
Zur Lösung des Problems (2. 34.) sei folgendes Verfahren (das modifizierte Verfahren von Newton.Kantorovic) vorgeschlagen:

$$\text{i)}\quad \overset{\sim(0)}{x} := x^+ > 0 : \quad b_y(x^+) \le x^+,$$

$$\text{(VNK)}$$

$$\text{ii)}\quad \overset{\sim(\nu)}{x} := b_y(\overset{\sim(\nu-1)}{x}) + b'(x^{(\nu-1)})(x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}), \quad \nu \in N.$$

Dann ist die durch (VNK) beschriebene Folge $\{\overset{\sim(\nu)}{x}\},\ \nu \in N$, wohl definiert. Diese Folge konvergiert gegen x^*, welches die Lösung der Gleichung $x = b_y(x)$ darstellt:

$$x^* \le \ldots \le \overset{\sim(\nu+1)}{x} \le \overset{\sim(\nu)}{x} \le \ldots \overset{\sim(1)}{x} \le \overset{\sim(0)}{x}. \qquad (3.\ 21.)$$

Ist der Operator b zweimal Frechèt-differenzierbar, dann konvergiert $\{\overset{\sim(\nu)}{x}\},\ \nu \in N$ quadratisch gegen x^*, d.h.

$$\| \overset{\sim(\nu+1)}{x} - \overset{\sim(\nu)}{x} \| \le c \| \overset{\sim(\nu)}{x} - \overset{\sim(\nu-1)}{x} \|^2. \qquad (3.\ 22.)$$

Hier ist $c > 0$ eine Konstante.

Beweis:
Es gilt:

$$x^+ \ge b_y(x^+)$$

$$\ge b(x^+)$$

$$\ge b'(x^+)x^+$$

und nach dem Satz über die strenge Abschätzung des Spektralradius eines linearen nicht zerlegbaren Operators:

$$r[b'(x^+)] < 1.$$

Damit ist das Element $\tilde{x}^{(1)}$ durch (MNK) für $\nu = 1$ wohl definiert. Analoge Überlegungen wie in S. 3. 18. ergeben

$$x^* \le \tilde{x}^{(1)} \le \tilde{x}^{(0)} . \tag{3. 23.}$$

Damit gilt

$$0 \le b'(\tilde{x}^{(1)}) \le b'(\tilde{x}^*)$$

und folglich

$$r\left[b'(\tilde{x}^{(1)}) \right] \le r\left[b'(\tilde{x}^*) \right] < 1. \tag{3. 24.}$$

Die Ungleichung (3. 24.) garantiert die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung (MNK ii) für $\nu = 2$, wodurch das Element $\tilde{x}^{(2)}$ wohl definiert ist.

Es wird nun gezeigt, dass

$$x^* \le \tilde{x}^{(2)} \le \tilde{x}^{(1)}$$

gilt:

$$x^{(2)} = b_y(\tilde{x}^{(1)}) + b'(\tilde{x}^{(1)})(\tilde{x}^{(2)} - \tilde{x}^{(1)})$$

$$\le b_y(\tilde{x}^{(0)}) + b'(\tilde{x}^{(0)})(\tilde{x}^{(1)} - \tilde{x}^{(0)}) + b'(\tilde{x}^{(1)})(\tilde{x}^{(2)} - \tilde{x}^{(1)})$$

$$= \tilde{x}^{(1)} + b'(\tilde{x}^{(0)})(\tilde{x}^{(2)} - \tilde{x}^{(1)}),$$

d.h.

$$\left(E - b'(\tilde{x}^{(1)}) \right)\left(\tilde{x}^{(2)} - \tilde{x}^{(1)} \right) \le 0$$

und wegen $\left(E - b'(\tilde{x}^{(1)}) \right)^{-1} \ge 0$

$$\tilde{x}^{(2)} \le \tilde{x}^{(1)} .$$

Es gilt ferner:

$$x^* \le b_y(x^*)$$

$$\le b_y(\tilde{x}^{(1)}) + b'(\tilde{x}^{(1)})(x^* - \tilde{x}^{(1)})$$

$$\le b_y(\tilde{x}^{(1)}) + b'(\tilde{x}^{(1)})(\tilde{x}^{(2)} - \tilde{x}^{(1)}) + b'(\tilde{x}^{(1)})(x^* - \tilde{x}^{(2)})$$

$$= \tilde{x}^{(2)} + b'(\tilde{x}^{(1)})(x^* - \tilde{x}^{(2)}),$$

d.h.

$$\left(E - b'(\tilde{x}^{(1)})\right)\left(x^* - \tilde{x}^{(1)}\right) \le 0,$$

$$x^* \le \tilde{x}^{(2)}.$$

Es lässt sich analog zeigen, dass

$$x^* \le \tilde{x}^{(3)} \le \tilde{x}^{(2)} \le \tilde{x}^{(1)}$$

und nach Induktion

$$x^* \le \tilde{x}^{(\nu+1)} \le \tilde{x}^{(\nu)} \le \ldots \tilde{x}^{(1)}.$$

Offensichtlich hat man dann

$$\lim_{\nu \to \infty} \tilde{x}^{(\nu)} = x^*.$$

Sei nun

$$M > 0: \ \left\| b''(x) \right\| \le M, \ \left(x \in \left[x^*, \ x^+\right]\right]. \qquad (3.\,26.)$$

Dann gilt:

$$\tilde{x}^{(\nu+1)} - \tilde{x}^{(\nu)} = b_y(\tilde{x}^{(\nu)}) - b_y(\tilde{x}^{(\nu-1)}) - b'(\tilde{x}^{(\nu-1)})(\tilde{x}^{(\nu)} - \tilde{x}^{(\nu-1)}) + b'(\tilde{x}^{(\nu)})(\tilde{x}^{(\nu+1)} - \tilde{x}^{(\nu)}),$$

$$\tilde{x}^{(\nu+1)} - \tilde{x}^{(\nu)} = \left(E - b'(\tilde{x}^{(\nu)})\right)^{-1} \left(b_y(\tilde{x}^{(\nu)}) - b_y(\tilde{x}^{(\nu-1)})\right) - b'\left(\tilde{x}^{(\nu-1)}\right)\left(\tilde{x}^{(\nu)} - \tilde{x}^{(\nu-1)}\right), \qquad (3.\,27.)$$

$$\left\| \tilde{x}^{(\nu+1)} - \tilde{x}^{(\nu)} \right\| \leq \left\| \left(E - b'(\tilde{x}^{(\nu)}) \right)^{-1} \right\| \frac{M}{2} \left\| \tilde{x}^{(\nu)} - \tilde{x}^{(\nu-1)} \right\|^2, \qquad (\because\ (3.\ 25.\text{-}3.\ 27.))$$

$$E - b'(x^*) \leq E - b'(\tilde{x}^{(\nu)}) \leq E - b'(\tilde{x}^{(1)}) \qquad (\because\ 3.\ 25.)$$

$$\left(E - b'(\tilde{x}^{(1)}) \right)^{-1} \leq \left(E - b'(\tilde{x}^{(\nu)}) \right)^{-1} \leq \left(E - b'(x^*) \right)^{-1}$$

$$\left\| \left(E - b'(\tilde{x}^{(1)}) \right)^{-1} \right\| \leq c_0 \max \left\{ \left\| \left(E - b'(\tilde{x}^{(\nu)}) \right)^{-1} \right\| ; \left\| \left(E - b'(x^*) \right)^{-1} \right\| \right\} \qquad (3.\ 29.)$$

Dabei ist c_0 eine Konstante.
Hieraus und unter Berücksichtigung von (3. 28.) folgt, dass es eine Konstante $c > 0$ existiert, für die (3. 22.) gilt.

B. 3. 21.
Im Folgenden wird zur Lösung des Problems (P. 2. 4.) [vgl. D. 2. 4.] ein spezielles Verfahren entwickelt:
Sei

$$r_j := \frac{w_j - z_j}{z_j},\ j = 1, \ldots, n, \qquad (3.\ 30.)$$

wobei $z_j,\ j = 1, \ldots, n$, eine ganze Zahl „nahe" an $w_j,\ j = 1, \ldots, n$, ist. Es gilt nun nach dem erweiterten Binomiallehrsatz

$$\begin{aligned} w_j^{q_{ij}} &= w_j^{q_{ij}} \left(1 + r_j\right)^{q_{ij}} \\ &= z_j^{q_{ij}} \left(1 + q_{ij} r_j + \binom{q_{ij}}{2} r_j^2 + \ldots \right), \quad i, j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \qquad (3.\ 31.)$$

Die Entwicklung (3. 31.) ist konvergent, falls

$$\left| r_j \right| < 1, \quad j = 1, \ldots, n,$$

d.h.

$$\begin{cases} \dfrac{w_j - z_j}{z_j} < 1 \\ \dfrac{z_j - w_j}{z_j} < 1 \end{cases}, j = 1, \ldots, n, \qquad (3.\ 32.)$$

gilt.

Hieraus resultiert für $w_j,\ j=1,\dots,n,$ die Einschließung

$$0 < w_j < 2z_j,\ j=1,\dots,n. \tag{3. 33.}$$

Aus (3. 33.) folgt, dass die Nichtkenntnis von $z_j,\ j=1,\dots,n,$ keine ernsthafte Einschränkung des Verfahrens darstellt. Diese sollte jedoch eher zu groß als zu klein gewählt werden. Substituiert man (3. 31.) in (P. 2. 4.) und vernachlässigt die Glieder des mehr als zweiten Grades, so erhält man:

$$w_j = \frac{1}{x_j^0}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^0 z_j^{q_j}\left(1+q_{ij}r_j+\binom{q_{ij}}{2}r_j^2+y_i\right)\right),\ i=1,\dots,n. \tag{3. 34.}$$

bzw.

$$z_j\left(r_i+1\right)x_i^0-\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^0 z_j^{q_{ij}} q_{ij} r_j-\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^0 z_j^{q_{ij}}\binom{q_{ij}}{2}r_j^2 = y_i-\left(z_i x_i^0-\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^0 z_j^{q_{ij}}\right).\ \ i=1,\dots,n, \tag{3. 35.}$$

Mit

$$P := \left(p_{ij}\right),\ i,j=1,\dots,n,$$

$$p_{ij:=}\begin{cases} z_j - q_{ij} z_j^{q_{ij}} \cdot \dfrac{b_{ij}^0}{x_j^0}, & \text{für } i=j \\[2ex] -q_{ij} z_j^{q_{ij}} \cdot \dfrac{b_{ij}^0}{x_j^0}, & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

`

$$S := \left(s_{ij}\right),\ i,j=1,\dots,n,$$

$$s_{ij} := -\binom{q_{ij}}{2} z_j^{q_{ij}} \cdot \frac{b_{ij}^0}{x_j^0},$$

$$t := \left(t_i\right),\quad i=1,\dots,n,$$

$$t_i := y_i - \left(z_i x_i^0 - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^0 z_j^{q_{ij}}\right),$$

$$\hat{X}^0 := \begin{pmatrix} x_1^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_n^0 \end{pmatrix},$$

$$r := \left(r_j\right),\; j = 1,\ldots,n,$$

$$r^* := \left(r_j^2\right),\; j = 1,\ldots,n,$$

lässt sich (3. 35.) folgendermaßen darstellen:

$$P\,\hat{X}^{0}\, r + s\,\hat{X}^{0}\, r^* = t. \qquad (3.\ 36.)$$

Sei nun

$$r^{(\nu)} := r^{(\nu-1)} + \Delta r^{(\nu-1)}, \quad \nu \in N. \qquad (3.\ 37.)$$

Dann gilt wegen $r_j^* = r_j^2,\; j = 1,\ldots,n,$

$$r_j^{*(\nu-1)} \approx r_j^{(\nu-1)} + 2 r_j^{(\nu-1)} \Delta r_j^{(\nu-1)}, \quad j = 1,\ldots,n;\; \nu \in N. \qquad (3.\ 38.)$$

Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (3. 36.) wird nun folgendes Iterations-verfahren vorgeschlagen:

$$P\,\hat{X}^{0}\left(r^{(\nu-1)} + \Delta r^{(\nu-1)}\right) + s\,\hat{X}^{0}\left(\tilde{r}^{(\nu-1)} + \Delta\,\tilde{r}^{(\nu-1)}\right) = t, \qquad (\mathrm{SNV})$$

mit

$$r^{(0)} := \left(P\,\hat{X}^{0}\right)^{-1} \cdot t, \qquad (3.\ 39.)$$

$$r^{(\nu-1)} := \left(r^{(\nu-1)}\right)^2, \quad j = 1,\ldots,n;\; \nu \in N, \qquad (3.\ 40.)$$

$$\Delta r^{(\nu-1)} := \left(2 r_j^{(\nu-1)} \Delta r_j^{(\nu-1)}\right),\; j = 1,\ldots,n;\; \nu \in N.$$

<u>B. 3. 21.</u>
Es lässt sich leicht zeigen, dass das Verfahren (SNV) mit dem Newtonschen Verfahren [vgl. S. 3. 17.]

$$J\left(r^{(\nu-1)}\right)\left(r^{(\nu)} - r^{(\nu-1)}\right) = -f\left(r^{(\nu-1)}\right), \quad \nu \in N,$$

zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems $f(r) = 0$ identisch ist, wobei

$$r^{(\nu)} - r^{(\nu-1)} = \Delta r^{(\nu-1)}, \quad \nu \in N,$$

die Matrix

$$P\hat{X}^{0} + 2S\hat{X}^{0} R^{(\nu-1)}, \quad \nu \in N,$$

mit

$$\hat{R}^{0} := \begin{pmatrix} r_1^{(\nu-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2^{(\nu-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_n^{(\nu-1)} \end{pmatrix}, \quad \nu \in N,$$

die Jacobische Matrix $J\left(r^{(\nu-1)}\right)$, $\nu \in N$, und

$$t - P\hat{X}^{0} r^{(\nu-1)} - S\hat{X}^{0} r^{(\nu-1)} = -f\left(r^{(\nu-1)}\right), \quad \nu \in N,$$

sind. Daher lassen sich die Eigenschaften des Newtonschen Verfahrens, einschließlich dessen Konvergenz, auf das Verfahren (SNV) übertragen.

B. 3. 32.

Es sei bemerkt, dass bereits im Kapitel II das Newtonsche Verfahren zur Lösung des Problems (P. 2. 1’.) mit den Bedingungen (B. 3.), (B. 7.), (B. 22.) – (B. 24) dargelegt und begründet wurde [vgl. S. 2. 23.].

(Letzte Aktualisierung: 29.08.2010)