II

Nichtlineare Input-Output-Modelle

D. 2. 1.
Unter dem *statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodell mit nichtlinearen Aufwandsfunktionen* verstehen wir:

$$x_i = b_i(x) + y_i,\ i = 1, 2, ..., n \tag{P. 2. 1.}$$

bzw.

$$x = b(x) + y. \tag{P. 2. 1'.}$$

Hier sind:

x_i : die Gesamtproduktion des Sektors $i = 1, 2, ..., n$,
$(x_i) =: x \in R_n^+$,
y_i : die Endnachfrage des Sektors $i = 1, 2, ..., n$,
$(y_i) =: y \in R_n^+$,
$b_i(x)$: die Aufwandsfunktion des Sektors $i = 1, 2, ..., n$,
$(b_i(x)) =: (b(x)) \in R_+^n$.

B. 2. 1.
Das Modell (P. 2. 1.) bzw. (B. 2. 1'.) ist sehr allgemein und lässt in dieser Form kaum qualitative und quantitative Aussagen zu. Es wird im Weiteren in verschiedene Richtungen spezialisiert.
Es werden insbesondere an die Aufwandsfunktion

$$b:\ R_+^n \to R_+^n \tag{2. 1.}$$

verschiedene Forderungen gestellt und entsprechende Modellansätze und Lösbarkeits-bedingungen erörtert.

D. 2. 2.
Das Problem (P. 2. 1.) bzw. (P. 2. 1'.) heißt *global* (bzw. *stark*) *lösbar*, wenn für jedes beliebige, nach Wahl aber fixierte $y \in R_+^n$ ein $x \in R_+^n$ existiert, derart dass (P. 2. 1.) (bzw. (P. 2. 1'.)) erfüllt ist.

D. 2. 3.
Das Problem (P. 2. 1.) bzw. (P. 2. 1'.) heißt *lokal* (bzw. *schwach*) *lösbar*, wenn für ein $y \in R_+^n$ ein $x \in R_+^n$ existiert, derart dass (P. 2. 1.) (bzw. (P. 2. 1'.)) erfüllt ist.

B. 2. 2.
Ersetzt man in D. 2. 2. bzw. D. 2. 3. überall $x \in R_+^n$ durch $R_+^n \setminus \{0\}$, dann spricht man von *streng globaler* bzw. *streng lokaler Lösbarkeit*.

B. 2. 3.
D. 2. 2. – D. 2. 3. verallgemeinern die Aussagen b) – c) in S. 1. 2.

B. 2. 4.
Die Aufwandsfunktion (2. 1.) heißt *additiv*, wenn gilt:

$$b:\ R_+^n \to R_+^n,$$

$$b_i(x) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x), \quad i = 1,2,\dots,n, \tag{B. 1.}$$

$$b_i:\ R_+^n \to R_+^1 \qquad i = 1,2,\dots,n,$$

$$b_{ij}:\ R_+^n \to R_+^1 \qquad i = 1,2,\dots,n.$$

Ein wichtiger Spezialfall von (B. 1.) ist

$$b_i(x) := \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x_i, x_j), \qquad i = 1,2,\dots,n. \tag{B. 2.}$$

Die Aufwandsfunktion (B. 1.) heißt *additiv separierbar*, wenn gilt

$$b_i(x) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x), \quad i = 1,2,\dots,n,$$
$$b_{ij}:\ R_+^1 \to R_+^1, \qquad i = 1,2,\dots,n. \tag{B. 3.}$$

Mit (B. 4.) möge folgender Spezialfall von (B. 1.) bezeichnet sein:

$$b_{ij} = a_{ij}(x) \cdot x_j \tag{B. 4.}$$

mit

$$a_{ij}(.) := \begin{cases} \dfrac{b_{ij}(x_1,\dots,x_n)}{x_j}, & x_j > 0 \\ \lim\limits_{\bar{x}_j \to x_j} \dfrac{b_{ij}(x_1,\dots,x_{j-1},\bar{x}_j,x_{j+1},\dots,x_n)}{\bar{x}_j} & x_j = 0 \end{cases}, \qquad i, j = 1,2,\dots,n$$

wobei die Existenz des obigen Grenzwertes für alle $i, j = 1,2,\dots,n$ vorausgesetzt wird.
Die Funktionen $a_{ij}(.),\ i, j = 1,2,\dots,n,$ werden als *Funktionen des direkten Materialaufwands* (pro Produkteinheit) bezeichnet.
Im Fall von

$$a_{ij} = k_{ij} = const, \quad i, j = 1, 2, ..., n, \tag{2. 2.}$$

hat man mit homogen-linearen Aufwandsfunktionen

$$b_{ij} = a_{ij} x_j, \quad i, j = 1, 2, ..., n, \tag{B. 5.}$$

zu tun [vgl. Kapitel I].

B. 2. 5.

Ein allgemeinerer Fall ist die inhomogen-lineare Funktion

$$b_{ij} = a_{ij} x_j + a_{ij}^*, \quad a_{ij}^* > 0, \quad i, j = 1, 2, ..., n. \tag{B. 6.}$$

Diese Funktion bringt zum Ausdruck, dass im Sektor $j = 1, 2, ..., n$ auch dann Aufwendungen entstehen, wenn nicht produziert wird. Es kann sich zum Beispiel um Aufwendungen handeln, die mit vorliegender Instandsetzung der Ausrüstungen verbunden sind.
Ein bedeutender Mangel der homogen-linearen Aufwandsfunktionen besteht in der Annahme der Unabhängigkeit der Koeffizienten des direkten Aufwands

$$a_{ij} = k_{ij} = const, \quad i, j = 1, 2, ..., n,$$

vom Produktionsvolumen x_j, $j = 1, 2, ..., n.$ Diese Unzulänglichkeit wird natürlich teilweise bei der Anwendung von inhomogen-linearen Aufwandsfunktionen umgangen. In diesem Fall ist es möglich, Aufwandsersparnisse auf Grund eines höheren Nutzungsgrades der Produktionskapazität zu berücksichtigen.

Im Folgenden wird ein anderer Zugang zu inhomogen-linearen Funktionen erörtert:
Gegeben sei das Problem

$$x - a^* - Ax - \bar{b}(x) = y \tag{P. 2. 2.}$$

mit

$$x := (x_i) \in R_+^n,$$
$$a^* := (a_i^*) \in R^n,$$
$$A := (a_{ij}) : R_n^+ \to R_n^+,$$
$$\bar{b}(x) := (\bar{b}(x)) \in R^n.$$

Hierbei soll $\bar{b} : R^n \to R^n$ der nichtlineare Teil der Aufwandsfunktion $b(x)$ sein.

Für

$$\bar{b}(x) \equiv 0 \quad \text{und} \quad a^* \neq 0$$

hat man nun mit einem statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodell mit inhomogen-linearen Aufwandsfunktionen zu tun. Es gilt also:

$$b_{ij}(x_j) = a_{ij}^* + a_{ij}x_j, \quad a_{ij}^* > 0; \quad i, j = 1, 2, ..., n.$$

Es gilt nun

$$\frac{a_{ij}^* + a_{ij}x_j}{x_j} = \frac{a_{ij}^*}{x_j} + a_{ij} =: a_{ij}^*(x_j), \quad i, j = 1, 2, ..., n. \qquad (2.\ 3.)$$

Der Koeffizient des direktren Materialaufwands ist in (2. 3.) nichtlinear, d. h. das statische volkswirtschaftliche Verflechtungsmodell mit inhomogen-linearen Aufwandsfunktionen ist nichtlinear bezüglich der Koeffizienten des direkten Materialaufwands. Dieser Fall ist besonders günstig, da in einer Reihe von Fällen die nichtlinearen Aufwandsfunktionen durch inhomogen-lineare Funktionen approximiert werden.
Ein Vorzug der inhomogen-linearen Aufwandsfunktionen besteht darin, dass die Lösbarkeit des entsprechenden Modells auf die Lösbarkeit des zugehörigen Modells mit homogen-linearen Aufwandsfunktionen zurückgeführt werden kann. Es gilt nämlich:

$$x = (E - A)^{-1}(y + a^*). \qquad (2.\ 4.)$$

Aus (2. 4.) resultiert ein anderer Vorteil des Modells mit inhomogen-linearen Aufwandsfunktionen:
Hat man die Inverse $(E - A)^{-1}$, so kann man das lineare Gleichungssystem

$$x - Ax = y + a^*$$

im Rahmen der Änderungsproblematik behandeln.

<u>Verfahren I</u>
Zur Lösung des Problems (P. 2. 1'.) sei folgendes Iterationsverfahren (*das Verfahren der sukzessiven Approximation I – VSA I*) vorgeschlagen:

$$\begin{cases} i) & x^0 := y \\ ii) & x^{(\nu)} := b(x^{(\nu-1)}) + y, \quad \nu \in N \end{cases}$$

<u>S. 2. 1.</u>

$$\left\langle b(x^2) \geq b(x^1),\ \forall x^2, x^1 \in R_+^n : x^2 \geq x^1 \geq 0 \right\rangle \qquad (B.\ 7.)$$

$$\Rightarrow$$

$$\left\langle \begin{matrix} \{x^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}:\ \text{VSA I} \\ x^{(\nu+1)} \geq x^{(\nu)} \geq 0,\ \nu \in N \cup \{0\} \end{matrix} \right\rangle.$$

Beweis:
Es gilt

$$x^{(1)} = b(x^{(0)}) + x^{(0)} \qquad (\because\ \text{VSA I (i)})$$

$$\geq x^{(0)} \qquad (\because\ b(x) \in R_+^n)$$

Es gelte die Induktionshypothese

$$x^{(\nu)} \geq x^{(\nu-1)} \geq 0\,. \tag{2. 5.}$$

Es gilt dann:

$$x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)} = b(x^{(\nu)}) - b(x^{(\nu-1)}) \qquad (\because\ \text{VSA I})$$

$$\geq 0, \qquad (\because\ \text{(B. 7.), (2. 5.)})$$

d.h.

$$x^{(\nu+1)} \geq x^{(\nu)} \geq 0, \quad \nu \in N \cup \{0\}.$$

q. e. d.

B. 2. 6.

Laut Bedingung (B. 7.) wird die Aufwandsfunktion $b:\ R_+^n \to R_+^n$ *isoton* vorausgesetzt. Dies bedeutet ökonomisch, dass mit nichtfallender Gesamtproduktion keine der erforderlichen Aufwendungen absolut abnimmt.

Im Falle

$$b:\ R_+^n \to R_+^n$$

$$b(x^2) \leq b(x^1), \quad \forall x^2, x^1 \in R_+^n : x^2 \geq x^1 \geq 0,$$

wäre die Aufwandsfunktion *antiton*.

Es sei bemerkt, dass sowohl Isotonie als auch Antitonie das Konstantenbleiben der Aufwandsfunktion einschließen und dass eine nichtisotone Aufwandsfunktion nicht notwendig antiton ist. Antitone Aufwandsfunktionen wird man in der Realität wohl kaum antreffen. In der Volkswirtschaft scheint die Isotonieannahme der Aufwandsfunktion durchaus der Normalfall entsprechen; dagegen ist diese Annahme in der Betriebswirtschaft nicht immer gerechtfertigt. Diese Problematik wird später detaillierter untersucht.

S. 2. 2.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) mit (B. 7.). Es gelte ferner

$$\lim_{\nu\to\infty} b(x^{(\nu)}) = b(\lim_{\nu\to\infty}(x^{(\nu)})). \tag{B. 8.}$$

Dann gilt:

$$\left\langle \{x^{(\nu)},\ \nu \in N \cup \{0\} :\ \text{VSA I ist konvergent.} \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left\langle \text{(P. 2. 1'.) ist global lösbar und } x^* = \lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)} \text{ ist e i n e Lösung von (P. 2. 1'.)} \right\rangle.$$

Beweis:

$(\Rightarrow)$

Sei $x^* := \lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)}$.

Dann gilt

$$x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)} = b(x^{(\nu)}) + y - x^{(\nu)} \tag{2. 6.}$$

$$= b(x^{(\nu)}) + y - x^{(\nu)} + b(x^{(\nu)}) - b(x^{(\nu)})$$

$$= y - f(x^{(\nu)}). \qquad (\text{mit } x^{(\nu)} - b(x^{(\nu)}) := f(x^{(\nu)}))$$

Da die Folge $\{x^{(\nu)}\}$, $\nu \in N \cup \{0\}$, konvergiert, folgt:

$$\lim_{\nu\to\infty}(x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}) = 0.$$

Damit erhält man:

$$0 = \lim_{\nu\to\infty}(x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)})$$

$$= \lim_{\nu\to\infty}(y - f(x^{(\nu)})) \qquad (\because (2.\ 6.))$$

$$= y - \lim_{\nu\to\infty} f(x^{(\nu)})$$

$$= y - \lim_{\nu\to\infty}(x^{(\nu)} - b(x^{(\nu)}))$$

$$= y - (x^* - \lim_{\nu\to\infty} b(x^{(\nu)}))$$

$$= y - (x^* - b(\lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)})) \qquad (\because (B.\ 8.))$$

$$= y - (x^* - b(x^*))$$

$$= y - f(x^*).$$

$(\Leftarrow)$ Induktion:

Sei x^* eine Lösung von (P. 2. 1’.):

$$x^* = b(x^*) + y\,. \tag{2. 7.}$$

Dann gilt

$$x^* \geq y \tag{2. 8.}$$

und

$$x^{(1)} = b(y) + y \qquad (\because \text{(VSA I(i))})$$

$$\leq b(x^*) + y \qquad (\because \text{(2. 8.), (B. 7.)})$$

$$= x^*. \qquad (\because \text{(2. 7.)})$$

Es gelte die Induktionshypothese

$$x^{(\nu)} \leq x^*. \tag{2. 9.}$$

Dann erhält man:

$$x^{(\nu+1)} = b(x^{(\nu)}) + y \qquad (\because \text{(VSA I(ii))})$$

$$\leq b(x^{(\nu)}) + y \qquad (\because \text{(2. 9.), (B. 7.)})$$

$$= x^* \qquad (\because \text{(B. 7.)}) \tag{2. 10.}$$

Damit ist $\{x^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$, beschränkt und monoton ($\because$ (B. 7.); sie ist also konvergent. Ihr Grenzwert löst nach Konstruktion das Problem (P. 2. 1'.)

q. e. d.

S. 2. 3.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.). Es gelten die Bedingungen (B. 7.) und (B. 8.).

$$\left\langle \text{(P. 2. 1'.) hat eine mehrdeutige Lösung für ein festes } y \in R_+^n \right\rangle$$

$$\Rightarrow$$

$$\left\langle \lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)} := x^* \leq \bar{x} \quad ; \ \bar{x}: \text{ eine beliebige Lösung für dieses feste } y \in R_+^n \right\rangle.$$

Beweis:

Es gilt:

$$\bar{x} = b(\bar{x}) + y \tag{2. 11.}$$

$$\geq y. \tag{2. 12.}$$

Wir zeigen nun, dass $\bar{x}$ eine obere Schranke der nach (VSA I) definierten Folge $\{x^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$, ist (Induktion):

Es gilt

$$x^{(1)} = b(y) + y$$

$$\leq b(\bar{x}) + y \qquad (\because \text{(2. 12), (B. 7.)})$$

$$= \bar{x}. \qquad (\because \text{(2. 11)})$$

Es gelte die Induktionshypothese

$$x^{(\nu)} \le \bar{x}. \tag{2. 13.}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} x^{(\nu+1)} &= b(x^{(\nu)}) + y && (2.\ 14.) \\ &\le b(\bar{x}) + y && (\because (2.\ 13), (B.\ 7.)) \\ &= \bar{x}. && (\because (2.\ 11)) \end{aligned}$$

Es gilt ferner

$$\begin{aligned} \lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)} &\le \lim_{\nu\to\infty} \bar{x} && (\because (2.\ 14)) \\ &= \bar{x}, && (\because (S.\ 2.\ 2.)) \end{aligned}$$

d.h.

$$x^* \le \bar{x}.$$

q. e. d.

B. 2. 7,
Nach S. 2. 7. liefert das Verfahren VSA I im gewissen Sinne die „beste Lösung“ des Problems (P. 2. 1’.), da die Endnachfrage y mit der geringsten Gesamtproduktion x realisiert wird.

Zum Beispiel lösen sowohl $x^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T$ als auch $x^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^T$ die in Bemerkung B. 2. 14 angeführte Aufgabe. Eine Anwendung des Verfahrens VSA I würde jedoch stets zur Lösung x^2 führen.
Ein anderer Zugang zur Theorie der Minimaleigenschaft eines statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodells mit nichtlinearen Aufwandsfunktionen wird in einem selbstständigen Kapitel diskutiert.

B. 2. 8.
Das Verfahren VSA kann auch mit $x^{(0)} = 0$ bzw. $x^{(0)} := x^+ \in R_+^n$ mit $f(x^+) \ge y$ gestartet werden. Für den Nachweis der Konvergenz benötigt man allerdings die zusätzliche Voraussetzung

$$\exists \text{ ein } x^+ \in R_+^n : f(x^+) \ge y. \tag{2. 15.}$$

Diese Annahme wäre auch für S. 2. 3. erforderlich. Die Einzelheiten werden im Kapitel III erörtert.

S. 2. 4.
Gegeben sei das Problem (P. 2. 1’.) mit (B. 7.) und (B. 8.).
Dann gilt:

$$\left\langle \text{(P. 2. 1'.) ist lösbar für e i n } \tilde{y} \in R_+^n \right\rangle \Rightarrow \left\langle \text{(P. 2. 1'.) ist lösbar für a l l e } y \in [0, \tilde{y}] \right\rangle$$

Beweis:

Sei $\{x^{(\nu)}\}, \ \nu \in N \cup \{0\}$ bzw. $\{\tilde{x}^{(\nu)}\}, \ \nu \in N \cup \{0\}$ zwei nach VSA I erzeugte Folgen mit $x^{(0)} := y$ bzw. $\tilde{x}^{(0)} := \tilde{y}$. Aus S. 2. 1. folgt, dass beide Folgen nicht fallend sind.

Wegen $y \leq \tilde{y}$ und (B. 7.) lässt sich ferner zeigen, dass

$$x^{(\nu)} \leq \tilde{x}^{(\nu)}, \ \nu \in N \cup \{0\}$$

gilt. Aus S. 2. 2. ist bekannt, dass $\{\tilde{x}^{(\nu)}\}, \ \nu \in N \cup \{0\}$, nach oben beschränkt ist. Hieraus folgt die Behauptung.

q. e. d.

S. 2. 5.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.). Es gelte (B. 7.), (B. 8.) und

$$b(\lambda x) \leq \lambda b(x), \ \forall \lambda > 1; \ \forall x \in R_+^n. \qquad \text{(B. 9.)}$$

Dann gilt

$$\left(\text{(P. 2. 1'.) ist lösbar für e i n } y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\} \right) \Rightarrow \left(\text{(P. 2. 1'.) ist lösbar für a l l e } y \in R_+^n \right).$$

Beweis:

Es sei $\{\tilde{x}^{(\nu)}\}, \ \nu \in N \cup \{0\}$ eine durch (VSA I) definierte Folge für $y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\}$. Ferner sei $\{\bar{x}^{(\nu)}\}, \ \nu \in N \cup \{0\}$, eine durch VERF. I definierte Folge für $y = \bar{y} := \lambda \tilde{y}$ für ein $\lambda > 1$.

Wegen S. 2. 1. sind beide Folgen monoton wachsend, und die Folge $\{\tilde{x}^{(\nu)}\}, \ \nu \in N \cup \{0\}$ ist konvergent (da (P. 2. 1'.) für $\tilde{y}$ lösbar angenommen wird und wegen S. 2. 1.).

Sei

$$\bar{x}^{(\nu)} \leq \lambda \tilde{x}^{(\nu)}, \text{ für ein } \nu \in N \cup \{0\}. \qquad \text{(2. 15.)}$$

Dann gilt

$$\bar{x}^{(\nu)} = b(\bar{x}^{(\nu-1)}) + \lambda \tilde{y}$$

$$\leq b(\lambda \tilde{x}^{(\nu-1)}) + \lambda \tilde{y} \qquad (\because \ \text{(2. 15.), (B. 7.)})$$

$$\leq \lambda (b(\tilde{x}^{(\nu-1)}) + \tilde{y}) \qquad (\because \ (2.9))$$

$$= \lambda \tilde{x}^{(\nu)} .$$

Damit ist die Folge $\{\bar{x}^{(\nu)}\}, \ \nu \in N \cup \{0\}$, auch beschränkt und wegen Monotonie konvergent.

Es existiert also eine Lösung des Problems (P. 2. 1`.) für $y = \lambda \tilde{y}$, falls das Problem für $y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\}$ lösbar ist. Die Aussage des Satzes folgt aus S. 2. 4. und der Tatsache, dass λ beliebig groß gewählt werden kann.

q.e.d.

B. 2. 9.

Die Bedingung (B. 9.) bedeutet ökonomisch: Erhöht man die Gesamtproduktion, so erhöht sich der damit verbundene Aufwand höchstens genau so schnell.

S. 2. 6.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.). Es gelte (B. 7.), (B. 8.) und (B. 9.). Dann gilt:

[(P. 2. 1'.) ist lösbar für ein $y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\}$]

$\Leftrightarrow$

[(P. 2. 1'.) ist eindeutig lösbar für alle $y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\}$].

Beweis:

Sei $\tilde{x}$ eine Lösung des Problems (P.1. 2.'), die als Grenzwert der durch VSA I definierte Folge $\{\bar{x}^{(\nu)}\}, \ \nu \in N \cup \{0\}$, mit $x^{(0)} := \tilde{y}$ gewonnen wurde. x^* möge eine weitere beliebige Lösung dieses Problems sein. Wegen S. 2. 3. gilt

$$\tilde{x} \leq x^* . \qquad (2.16.)$$

Sei ferner

$$\lambda \in R^1 : \ \min(\lambda \tilde{x}_i - x_i^*) = 0.$$

damit gilt

$$\lambda \tilde{x}_i - x_i^* \geq 0,$$

und wegen (2. 16.): Entweder ist $\lambda = 1$, womit die Behauptung des Satzes als bewiesen gilt oder ist $\lambda > 1$.

Wir betrachten den letzten Fall:

Da $\tilde{x}$ und x^* Lösungen des Problems (P. 2. 1'.) sind, hat man:

$$\lambda \tilde{x} - x^* = \lambda b(\tilde{x}) - b(x^*) + (\lambda - 1) y$$

$$\geq b(\lambda \tilde{x}) - b(x^*) + (\lambda - 1) y \qquad (\because \text{(B. 9.)})$$

$$\geq (\lambda - 1) y \qquad (\because (\lambda \tilde{x} \geq x^*), \text{(B. 7.)})$$

$$> 0. \qquad (\because (y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\}), \lambda \in R^1 \setminus \{0\})$$

da aber der Vektor $\lambda \tilde{x} - x^*$ mindestens eine Nullkomponente hat, ist dies ein Widerspruch.
Folglich ist $\lambda = 1$ und $\tilde{x} = x^*$.

q.e.d

B. 2. 10.
Die Lösung des Gleichungssystems (P. 2. 1'.) ist gleichbedeutend mit der Bestimmung der Fixpunkte der Abbildung

$$b_y :\equiv b + y : \ R_+^n \to R_+^n,$$

also aller $x^* \in R_+^n$ mit

$$x^* = b_y(x^*)$$

$$= b(x^*) + y.$$

B. 2. 11.
Im Folgenden werden die mathematischen Aussagen zunächst in voller Allgemeinheit gemacht, d.h. spezielle Eigenschaften des Problems (P. 2. 1'.) werden nur dann vorausgesetzt, wenn sie wirklich gebraucht werden.

S. 2. 7. (*Kontraktionssatz*)
Gegeben sei die auf der angeschlossenen Teilmenge $D_0 \subset D$ kontrahierende Abbildung [Vgl. D. 1. 3.]

$$g : D \subset R^n \to R^n.$$

Es gelte ferner

$$g(D_0) \subset D_0.$$

Dann hat g einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $x^* \in D_0$.
Die Folge

$$x^{(\nu)} = g(x^{(\nu-1)}), \quad \nu \in N \qquad (2. 17.)$$

konvergiert für jedes $x^0 \in D_0$ gegen $x*$.

Beweis:

Existenz:
Wegen $g(D_0) \subset D_0$ ist die Folge (2. 17.) wohl definiert und bleibt in D_0. Es gilt:

$$\left\|x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}\right\| = \left\|g(x^{(\nu)}) - g(x^{(\nu-1)})\right\|$$

$$\leq \lambda \left\|x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}\right\|.$$

Damit folgt für $\vartheta \geq 1$:

$$\left\|x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}\right\| \leq \sum_{\mu=1}^{\vartheta} \left\|x^{(\nu+\mu)} - x^{(\nu+\mu-1)}\right\|$$

$$\leq (\lambda^{\vartheta-1} - 1 + ... + 1) \left\|x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}\right\|$$

$$\leq \frac{1}{1-\lambda} \left\|x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}\right\|$$

$$\leq \frac{\lambda^{\nu}}{1-\lambda} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|.$$

$\left\{x^{(\nu)}\right\}$, $\nu \in N$, ist also eine Cauchyfolge und hat daher wegen der Abgeschlossenheit von D_0 einen Grenzwert $x*$ in D_0.
Es bleibt zu zeigen, dass $x*$ Fixpunkt von g ist. Das folgt aber aus:

$$0 \leq \left\|x* - g(x*)\right\|$$

$$\leq \left\|x* - x^{(\nu)}\right\| + \left\|x^{(\nu)} - g(x*)\right\|$$

$$= \left\|x* - x^{(\nu)}\right\| + \left\|g(x^{(\nu-1)}) - g(x*)\right\|$$

$$\leq \left\|x* - x^{(\nu)}\right\| + \lambda \left\|x^{(\nu-1)} - x*\right\|,$$

weil die rechte Seite für $\nu \to \infty$ gegen Null strebt.

Eindeutigkeit:
Ist

$$g(x^1) = x^1, \quad g(x^2) = x^2 \text{ mit } \quad x^1 \neq x^2,$$

so folgt:

$$\|x^1 - x^2\| = \|g(x^1) - g(x^2)\|$$

$$\leq \lambda \|x^1 - x^2\|$$

$$< \|x^1 - x^2\|.$$

Dies ist ein Widerspruch. Es folgt $x^1 = x^2$.

q.e.d.

S. 2. 8.
Es gilt:

$$\langle \exists \text{ ein } \lambda \in [0,\ 1[: \| b(x^2) - b(x^1) \| \leq \lambda \| x^2 - x^1 \|, \forall x^1, x^2 \in R^n_+ \rangle$$
$$\Leftrightarrow \tag{B. 10.}$$
$$\langle \text{(P. 2. 1'.) ist eindeutig global lösbar} \rangle$$

Beweis:
Der Beweis folgt aus S. 2. 7. unter Berücksichtigung folgender Tatsachen:

1. $b_y :\equiv b + y,\ R^n_+ \to R^n_+$ ersetzt die Abbildung g.
2. b_y ist trivialerweise genau dann kontrahierend, wenn b es ist [Vgl. (B. 10.)].
3. Aus $D = R^n_+$ folgt für jedes $x \in R^n_+$ auch $b_y = b(x) + y \in R^n_+$. Damit ist in diesem Fall die Bedingung $b_y(R^n_+) \subset R^n_+$ von vornherein erfüllt.

q. e. d.

B. 2. 12.
(B. 10.) ist als Voraussetzung ziemlich schwach, denn kontrahierende Abbildungen sind zwar stetig, aber nicht notwendig (additiv) separierbar oder isoton, geschweige denn differenzierbar. Im Kapitel III geben wir Bedingungen an, aus denen folgt, dass eine Abbildung kontrahierend ist. Dort werden auch weitere Eigenschaften der Folge (2. 17.) untersucht.

S. 2. 9.
Gegeben sei das Problem (P. 2. 1’.) mit (B. 4.), (B. 7.) und (B. 8.), d. h.

$$x = A(x)x + y \tag{P. 2. 3.}$$

mit

$$A(x) := (a_{ij}(x)) \in M(n, n).$$

Es gilt:

$$\lambda(A(x)) < 1,\ \forall x \in R^n_+ :\ x > A(x)x.$$

Beweis:
Sei ein beliebiges $x \in R_+^n$ mit

$$x > A(x)x \tag{2. 18.}$$

gegeben.. Wir nehmen an, dass

$$\lambda(A) \geq 1$$

gilt. Dies bedeutet:

$$\exists \text{ kein } \tilde{x} \in R_+^n : \ \tilde{x} > A(\tilde{x})\tilde{x},$$

in Widerspruch zu (2. 18.). Daher die Behauptung.

q.e.d.

B. 2. 13.
Die Behauptung von S. 2. 9. gilt auch für alle $x \in R_+^n$ mit $x = A(x)x$, falls $A(x)$ für alle $x \in R_+^n$ nichtzerlegbar ist.

S. 2. 10.
Es existiere

$$\sup_{x \in R_+^n} a_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n) := \bar{a}_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, ..., n.$$

Dann gilt:

$$\left\langle \lambda(\bar{A}) < 1 \text{ mit } \bar{A} := (\bar{a}_{ij}) \in M(n,n) \right\rangle \tag{B. 11.}$$

$$\Rightarrow$$

$$\langle \text{(P. 2. 3) ist global lösbar.} \rangle$$

Es gilt:

$$x^{(\nu)} = A(x^{(\nu-1)})x^{(\nu-1)} + y \qquad (\because \ \text{VSA I})$$

$$\leq A(x^{(\nu)})x^{(\nu)} + y \qquad (\because \ \text{(B. 7.)})$$

$$\leq \bar{A}x^{(\nu)} + y,$$

$$x^{(\nu)} \leq (E - A)^{-1} y. \qquad (\because \ \text{(B. 11.)})$$

Damit ist $\{x^{(\nu)}\}, \ \nu \in N \cup \{0\},$ nach oben beschränkt. Andererseits ist diese Folge nach S. 2. 1. monoton. Unter Berücksichtigung von S. 2. 2. folgt dann die Behauptung.

q. e. d.

B. 2. 14.
Bedingung (B. 11.) garantiert die Existenz einer Lösung von (P. 2. 3.) für ein beliebiges $y \in R_+^n$, *nicht* jedoch deren Eindeutigkeit. Dies wird an einem *Gegenbeispiel* gezeigt:
Sei

$$a_{ij} := \begin{cases} x_j & \text{für} \quad x_j \le \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \text{für} \quad x_j > \frac{1}{3} \end{cases}, \qquad i, j = 1, 2, ..., n, \qquad\qquad y := \left(1/9 \quad 1/9\right)^T.$$

Es gilt:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{} \end{pmatrix}, \qquad \lambda(\bar{A}) < 1.$$

Aber sowohl

$$x^1 = \left(1/3 \quad 1/3\right)^T$$

als auch

$$x^1 = \left(1/6 \quad 1/6\right)^T$$

stellen Lösungen des Problems dar.

S. 2. 11.
Gegeben sei das Problem (P. 2. 3.) mit (B. 10.) und

$$A(x^2) \le A(x^1), \quad \forall x^2 \ge x^1 \ge 0. \qquad \text{(B. 12.)}$$

Dann ist (P. 2. 3.) eindeutig lösbar.

Beweis:

Existenz:
Siehe S. 2. 10.

Eindeutigkeit:
Das Problem habe die Lösungen

$$x^i, \; i = 1, 2, ..., m,$$

d.h., es gelte

$$x^i = A(x^i)x^i + y, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{2. 19.}$$

Es gilt dann

$$\exists \text{ ein } x^1 : \ x^1 \le x^i, \quad i = 1, 1, \ldots, m. \qquad (\because \text{ S. 2. 2.}) \tag{2. 20.}$$

Ferner gilt für $i = 1, 2, \ldots, m$:

$$x^i - x^1 = A(x^i)x^i - A(x^1)x^1 \qquad (\because \text{ (2. 19.), (VSA I)})$$

$$\le A(x^1)x^i - A(x^1)x^1 \qquad (\because \text{ (2. 20.), (B. 12.)})$$

$$= A(x^1)(x^i - x^1)$$

$$\le \bar{A}(x^i - x^1) \ .$$

$$(E - \bar{A})(x^i - x^1) \le 0,$$

$$x^i - x^1 \le 0, \qquad (\because \text{ B. 11.}) \tag{2. 21.}$$

$$x^i = x^1. \qquad (\because \text{ (2. 20), (2. 21.)})$$

q. e. d.

B. 2. 15.
Bedingung (B. 12.) heißt ökonomisch, dass bei nicht abnehmender Gesamtproduktion sämtliche direkte Ver4brauchsnormen nicht abnehmen.

S. 2. 12.
Gegeben se das Problem (P. 2. 3.) mit (B. 7.), (B. 8.) und

$$1^T A(x^2) \le 1^T A(x^1) < 1, \quad \forall x^2 \ge x^1 \ge 0, \tag{B. 13.}$$

wobei $1 := \begin{pmatrix} 1, & . & . & . & 1 \end{pmatrix}^T$ ist.

Dann ist das Problem (P. 2. 3.) eindeutig global lösbar.

Beweis:
Es gilt

$$1^T(x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}) = 1^T y - 1^T(E - A(x^{(\nu-1)}))x^{(\nu-1)}. \qquad (\because \text{ VSA I}) \tag{2. 22.}$$

Falls die linke Seite der Gleichung (2. 22.) gleich Null ist, gilt wegen (B. 7.) $x^{(\nu)} = x^{(\nu-1)}$, und damit existiert eine Lösung.
Ist die linke Seite der Gleichung (2. 22.) positiv, so hat man

$$1^T(E - A(x^{(\nu-1)}))x^{(\nu-1)} < 1^T y.$$

Es gilt jedoch wegen (B. 13.)

$$1^T(E - A(x^{(\nu-1)}))x^{(\nu-1)} > 0.$$

Damit ist $\{x^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$, für jedes feste y nach oben beschränkt. Dies zusammen mit der Monotonie der Folge $\{x^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$, macht sie auch konvergent.
Gemäß S. 2. 2. ist (P. 2. 3.) global lösbar.
Wir zeigen nun, dass die Lösung dieses Problems eindeutig ist:

Seien $\tilde{x}, x^*$ zwei Lösungen des Problems (P. 2. 3.), wobei $\tilde{x}$ als Grenzwert der durch VSA I definierten Folge gewonnen wurde. Dann gilt wegen S. 2. 3.

$$\tilde{x} \le x^*. \tag{2. 23.}$$

Ferner hat man

$$\begin{aligned} 1^T(x^* - \tilde{x}) &= 1^T(A(x^*)x^* - A(\tilde{x})\tilde{x}) \\ &\le 1^T A(\tilde{x})(x^* - \tilde{x}), \qquad (\because\ (\text{B. } 13.)) \end{aligned}$$

$$1^T(E - A(\tilde{x}))(x^* - \tilde{x}) \le 0 \tag{2. 24.}$$

Andererseits gilt

$$1^T(E - A(\tilde{x})) > 0 \qquad (\because\ (\text{B. } 13.))$$

und wegen (2. 24.)

$$x^* - \tilde{x} \le 0.$$

Dies ergibt zusammen mit (2. 23.): $\tilde{x} = x^*$.

q. e. d.

B. 2. 16.
Bedingung (B. 13.) bedeutet einerseits, dass mit nicht abnehmender Gesamtproduktion die Gesamtlieferung der einzelnen Sektoren zur Herstellung einer Produktionseinheit sich nicht erhöht. Andererseits ist sie eine Verallgemeinerung der aus dem Kapitel I bekannten Bauer-Solow-Bedingung.

B. 2. 17.
Zum Beweis des Satzes S. 2. 5. für den Spezialfall (P. 2. 3.) und des Satzes S. 2. 12. genügte. Außer (B. 7.), (B. 8.) eine schwächere Version der Bedingung (B. 13.), nämlich

$$\left\langle \begin{array}{ll} 1^T A(x^2) \le 1^T A(x^1), & \forall x^2 \ge x^1 \ge 0 \\ 1^T A(x) < 1^T, & \forall x : x > A(x)x \end{array} \right\rangle \tag{B. 14.}$$

vorauszusetzen.

Auf den Beweis von S. 2. 12. unter der Bedingung (B. 14.) wird hier verzichtet. Die Argumentation des zweiten Teils des genannten Satzes behält ihre Gültigkeit, benötigt jedoch nicht die zusätzliche Stärke von (B. 13.).

Im Folgenden wird der Satz S. 2. 5. für das Problem (P. 2. 3.) neu formuliert und bewiesen:

<u>S. 2. 13.</u>
Gegeben sei das Problem (P. 2. 1.). Es gelte (B. 7.), (B. 8.) und (B. 14.). Dann gilt:

$$\left\langle \text{ (P. 2. 3.) is lösbar für } \textit{ein } y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\} \right\rangle$$

$$\Rightarrow$$

$$\left\langle \text{(P. 2. 3.) is lösbar für } \textit{alle } y \in R_+^n \right\rangle.$$

Beweis:

Sei $\tilde{x}$ eine Lösung von (P. 2. 3.), die als Grenzwert der durch VSA I definierten Folge $\{\tilde{x}^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$, für $y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\}$ gewonnen wurde. Die Existenz der Lösung $\tilde{x}$ ist durch die Voraussetzung des Satzes und wegen S. 2. 2. gesichert.
Es gilt nun:

$$\begin{aligned} \overset{\approx}{x}^{(\nu)} &= A(\overset{\approx}{x}^{(\nu-1)})\overset{\approx}{x}^{(\nu-1)} + y \\ &\le A(\overset{\approx}{x}^{(\nu)})\overset{\approx}{x}^{(\nu)} + y\,. && (\because \text{(B. 7.)}) \end{aligned}$$

Damit hat man:

$$\begin{aligned} 1^T \overset{\approx}{x}^{(\nu)} &\le 1^T A(\overset{\approx}{x}^{(\nu)})\overset{\approx}{x}^{(\nu)} + y \\ &\le 1^T A(\overset{\approx}{x}^{(\nu)})\overset{\approx}{x}^{(\nu)} + 1^T y\,. && (\because \text{(B. 13.) und } \overset{\approx}{x}^{(\nu)} \ge \tilde{x} \text{ (wegen S. 2. 3.)}) \\ (1^T - 1^T A(\tilde{x}^{(\nu)}))\overset{\approx}{x} &\le 1^T y \\ &> 0. && (\because y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\}) \end{aligned}$$

Da $(1^T - 1^T A(\tilde{x}^{(\nu)}))$ wegen (B. 13.) streng positiv ist, ist $\{\overset{\approx}{x}^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$ nach oben beschränkt und damit auch konvergent. Gemäß (S. 2. 2.) ist (P. 2. 3.) für ein $y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\}$ lösbar. Wegen S. 2. 4. ist es auch für alle $y \in R_+^n$ lösbar.

q. e. d.

B. 2. 18.
Im Folgenden wird das statische volkswirtschaftliche Verflechtungsmodell mit nichtlinearen Aufwandsfunktionen von Sandberg [Vgl. Sandberg, I. W.: A Nonlinear Input-Output Model of a Multisectored Economy. In: Econometrica 41 (1973), S. 1167-1182] behandelt. Dabei warden an die Aufwandsfunktionen

$$b : R_+^n \to R_+^n$$

gestellt:

i. (B. 3.)

ii. $b:$ stetig differenzierbar (B. 15.)

(oder speziell wegen (B. 3.): $\exists \ \dfrac{\partial b_{ij}}{\partial x_j}, \ i, j = 1, 2, ..., n:$ stetig)

iii. $b(0) = 0$

(oder speziell wegen (B. 3.): $b_{ij}(0) = 0, \ i, j = 1, 2, ..., n$) (B. 16.)

iv. $\dfrac{db}{dx}(0) \geq \dfrac{db}{dx}(x) \geq 0, \ \forall x \in R_+^n$

(oder speziell wegen (B. 3.):

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j}(0) \geq \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j}(x_j) \geq 0, \ \forall x_j \in R_+^1, \ i, j = 1, 2, ...n) \qquad \text{(B. 17.)}$$

S. 2. 14.
Die in (B. 2. 1.) definierte Aufwandsfunktion $b : R_+^n \to R_+^n$ erfüllt die Bedingung (B. 7.), d.h. ist isoton.

Beweis:
Weil b additiv separabel ist, genügt es zu zeigen, dass die Funktionen $b_{ij}, \ i, j = 1, 2, ..., n$, monoton wachsen.
Seien also

$$x_j^{'}, x_j^{''} \in R_+^1 : \ x_j^{'} < x_j^{''}, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Dann folgt nach einem Mitteölwertsatz für ein $\lambda \in \left] x_j^{'}, \ x_j^{''} \right[$ und alle $i, j = 1, 2, ..., n$:

$$\begin{aligned} b_{ij}(x_j^{''}) - b_{ij}(x_j^{'}) &= \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_{ij}}(\lambda)(x_j^{''} - x_j^{'}) \\ &\geq 0. \qquad (\because \ \text{(B.17.)}) \end{aligned}$$

q. e. d.

L. 2. 1.
Seien

$$A, B \in M(n,n): \text{ reelle: } A \geq B \geq 0\,.$$

Dann gilt:

$$(E-A) \in M_M \;\; \Rightarrow \;\; (E-B) \in M_M\,.$$

Beweis:
Es gilt

$$\exists x \in R_+^n: \; (E-A)x = x - Ax > 0. \qquad (\because \text{ (S. 1. 2. b.)})$$

Andererseits

$$A \geq B \geq 0 \; Ax \geq Bx.$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}(E-B)x &= x - Bx \\ &\geq x - Ax \\ &> 0\,,\end{aligned}$$

d.h. $B \in M_M$. .

q.e.d.

L. 2. 2.
Sei

$$f(x) := x - b(x). \qquad (2.\ 25.)$$

Gilt für die Jacobische Matrix $\dfrac{df}{dx}$ von $f(x)$

$$\frac{df}{dx}(0) \in M_M\,,$$

so gibt es für alle $x^1, x^2 \in R_+^n$ eine $M-$Matrix

$$B(x^1, x^2) \geq \frac{dt}{dx}(0)$$

mit

$$f(x^1) - f(x^2) = B(x^1, x^2)(x^1 - x^2).$$

Beweis:
Die Anwendung eines Mittelwertsatzes [Vgl. Ortega, J. M.; Rheinboldt, W. C.: Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables, New York-London, 1970, S. 68f.] ergibt

$$f(x^1) - f(x^2) = B(x^1, x^2)(x^1 - x_2)$$

mit

$$B(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(x^2 + \lambda_1\left(x^1 - x^2\right)\right) & . & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\left(x^2 + \lambda_1\left(x^1 - x^2\right)\right) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\left(x^2 + \lambda_n\left(x^1 - x^2\right)\right) & . & . & . & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(x^2 + \lambda_n\left(x^1 - x^2\right)\right) \end{pmatrix},$$

wobei

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \left]0,\ 1\right[$$

gilt.

Wegen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \delta_{ij} - \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j}(x_j), \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

folgt:

$$B(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\partial b_{11}}{\partial x_1}\left(x_1^2 + \lambda_1\left(x_1^1 - x_1^2\right)\right) & . & . & . & -\frac{\partial b_{1n}}{\partial x_n}\left(x_n^2 + \lambda_1\left(x_n^1 - x_n^2\right)\right) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ -\frac{\partial b_{n1}}{\partial x_1}\left(x_1^2 + \lambda_n\left(x_1^1 - x_1^2\right)\right) & . & . & . & 1 - \frac{\partial b_{nn}}{\partial x_n}\left(x_n^2 + \lambda_n\left(x_n^1 - x_n^2\right)\right) \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\frac{df}{dx}(0) = \begin{pmatrix} 1-\frac{\partial b_{11}}{\partial x_1}(0) & . & . & . & -\frac{\partial b_{1n}}{\partial x_n}(0) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ -\frac{\partial b_{n1}}{\partial x_1}(0) & . & . & . & 1-\frac{\partial b_{nn}}{\partial x_n}(0) \end{pmatrix}$$

und (B. 17.) folgt

$$B(x^1, x^2) \geq \frac{df}{dx}(0).$$

Weil $\frac{dt}{dx}$ eine $M-$Matrix ist, lässt sich wegen (B. 17.) Das Lemma L. 2. 1. anwenden. Damit ist $B(x^1, x^2)$ eine $M-$Matrix.

q. e. d.

<u>S. 2. 14.</u>
Sei

$$\frac{df}{dx}(0) \in M_M.$$

Dann gilt stets für alle $x^1, x^2 \in R_+^n$:

$$f(x^1) \geq f(x^2) \;\Rightarrow\; x^1 \geq x^2.$$

Beweis:
Unter Anwendung von L.2.2. ergibt sich:

$$0 \leq f(x^1) - f(x^2)$$

$$= B(x^1, x^2)(x^1 - x^2)$$

mit einer $M-$Matrix $B(x^1, x^2)$. Wegen $B(x^1, x^2)^{-1} \geq 0$ folgt $x^1 - x^2 \geq 0$.

q. e. d.

<u>B. 2. 19.</u>
Satz S. 2. 14. verallgemeinert die Aussage von S. 1. 4. und besagt, dass eine Erhöhung der Endnachfrage eine Erhöhung der Gesamtproduktion erfordert (vgl. B. 1. 3.)

S. 2. 15.
Sei

$$\frac{df}{dx}(0) \in M_M .$$

Dann ist f injektiv.

Beweis:
Sei

$$f(x^1) = f(x^2),$$

d.h.

$$f(x^1) \geq f(x^2) \quad \wedge \quad f(x^1) \leq f(x^2).$$

Dann folgt wegen (S. 2. 14.)

$$x^1 \geq x^2 \quad \wedge \quad x^1 \geq x^2 \ ,$$

also

$$x^1 = x^2.$$

q. e. d.

B. 2. 20.
S. 2. 15. bedeutet: Jede Endnachfrage kann mit genau einer Gesamtproduktion realisiert werden.

L. 2. 3.
Sei $t : R_+^n \to R_+^n$ stetig mit $t(0) = 0$. Sei

$$D := \left\{ x \mid x \in R_+^n, t(x) \geq 0 \right\}.$$

Es gelte ferner:

(i) Für jedes $y \in R^n, y > 0$ und jedes $\alpha \geq 0$ mit $\alpha y \in t(D)$ gibt es eine positive reelle Zahl β, so dass $(\alpha + \gamma) y \in t(D)$ ist für alle $\gamma \in \left]0, \ \beta\right]$.

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $\|x\|_2 \geq \delta$ gilt $\|t(x)\|_2 \geq \varepsilon.$

Dann ist $t(D) = R_+^n$. Ist t / D injektiv, so ist die Umkehrabbildung $\left(t / D\right)^{-1} : R_+^n \to D$ stetig.

Beweis:
Um zu zeigen, dass $t(D)$ abgeschlossen ist, wählen wir eine Folge $\left\{ y^{(i)} \right\}, i \in N,$ mit $y^{(i)} \in t(D), \ i = 1, 2, \ldots$ und $\lim\limits_{i \to \infty} y^{(i)} = y.$ Wegen $t(D) \subset R_+^n$b gilt $y \in R_+^n$. Zu zeigen ist jetzt, dass es ein $x \in D$ mit $t(x) = y$ gibt. Wegen $y^{(i)} \in t(D)$ gibt es eine Folge $\left\{ x^i \right\}, i \in N$ mit $x^{(i)} \in D$

und $t(x^{(i)}) = y^{(i)}, i = 1, 2, \ldots$ Aus Bedingung (ii) folgt, dass $\{x^i\}, i \in N$ unbeschränkt ist und somit eine konvergente Teilfolge $\{\tilde{x}^{(i)}\}, i \in N$ enthält.

Sei $x := \lim\limits_{i\to\infty} \tilde{x}^{(i)}$. Es gilt $x \in D$, weil D wegen der Stetigkeit von t abgeschlossen ist. Weiter folgt

$$t(x) = t(\lim_{i\to\infty} \tilde{x}^{(i)}) = \lim_{i\to\infty} f(\tilde{x}^{(i)}) = y.$$

Also $t(D)$ ist abgeschlossen.

Sei $y \in R^n$ und $y > 0$. Wegen $0 \in t(D)$ ist

$$M := \left\{\delta \mid \delta \in R^1_+, \tau y \in t(D) \text{ für alle } \tau \in [0,\ \delta]\right\} \neq \emptyset.$$

Sei $\lambda := \sup M$. Angenommen, es sei $\lambda < \infty$. Dann folgt $\lambda y \in t(D)$, weil $t(D)$ abgeschlossen ist. Wegen Bedienung (i) gibt es dann ein $\beta > 0$, so dass $\tau y \in t(D)$ ist für alle $\tau \in [0,\ (\lambda + \beta)]$. Das ist ein Widerspruch zu $\lambda = \sup M$. Also gilt $\tau y \in t(D)$ für alle $\tau \geq 0$. Damit folgt

$$\left\{y \mid y \in R^n, y > 0\right\} \subset t(D).$$

Wegen der Abgeschlossenheit von $t(D)$ und $t(D) \in R^n_+$ erhält man damit $t(D) = R^n_+$.

Sei weiter t / D injektiv und $t(x) = y$ für ein $x \in D$. Sei $\left\{y^{(i)}\right\}, i \in N$, eine Folge in R^n_+ mit $\lim\limits_{i\to\infty} y^{(i)} = y$. Sei $\left\{x^{(i)}\right\}, i \in N$, die durch $t(x^i) = y^{(i)},\ i = 1, 2, \ldots, n$, in D definierte Folge. Sei $\tilde{x}$ ein beliebiger Häufungspunkt von $\left\{x^{(i)}\right\}, i \in N$, und $\{\tilde{x}^{(i)}\}, i \in N$, eine Teilfolge von $\left\{x^{(i)}\right\}, i \in N$, die gegen $\tilde{x}$ konvergiert. Wegen der Abgeschlossenheit con D ist $\tilde{x} \in D$, und wegen der Stetigkeit von t folgt:

$$t(x) = y = \lim_{i\to\infty} t(\tilde{x}^i) = t(\lim_{i\to\infty} \tilde{x}^i) = t(\tilde{x}).$$

Weil t / D injektiv ist, folgt $x = \tilde{x}$ und x ist der einzige Häufungspunkt von $\left\{x^{(i)}\right\}, i \in N$, d.h. $\lim\limits_{i\to\infty} x^{(i)} = x$.

Die Abbildung $(t / D)^{-1}$ ist also stetig.

q. e. d.

<u>S. 2. 16.</u>

Die Matrix $\dfrac{df}{dx}(0)$ ist genau dann $M-$Matrix, wenn es für jedes $y \in R^n_+$ genau ein $x \in R^n_+$ mit $f(x) = y$ gibt, x stetig von y abhängt und für alle $y \in R^n_+$ gilt:

$$f^{-1}(y) = My + O(y)$$

mit $M \in M_M$ und einer stetigen Abbildung $O : R_+^n \to R^n$ mit $\lim_{y \to 0} \frac{O(y)}{\|y\|_2}$.

Beweis:

Sei S eine Umgebung des R_+^n und $\tilde{b} : E \to R_+^n$, $\tilde{b}(x) := \sum_j \tilde{b}^j(x_j)$, eine Abbildung

mit $\tilde{b} \mid R_+^n \equiv b$ und

$$\frac{\partial \tilde{b}^j}{\partial x_j}(x_j) = \frac{\partial b_j}{\partial x_j}(0)$$

für alle $x \in S$ mit $x_j < 0$. Sei ferner $\tilde{f} \equiv id - \tilde{b}$.

"$\Rightarrow$"

Sei $\frac{df}{dx}(0)$ eine $M-$Matrix.

Wegen (B. 17.) und (L. 2. 1.) ist $\frac{d\tilde{f}}{dx}(x)$ für alle $x \in S$ eine $M-$Matrix. Insbesondere gilt

$$\det\left(\frac{d\tilde{f}}{dx}(x)\right) \neq 0 \quad \text{für } \forall x \in S.$$

Damit ist $\tilde{f}$ ein lokaler Diffeomorphismus von S in R^n. Sei $y \in R^n$, $y > 0$ und $\alpha \in R_+^1$, so dass es ein $x \in R_+^n$ gibt mit $f(x) = \alpha y$. Es existiert eine Umgebung von x, die bijektiv auf eine Umgebung von αy abgebildet wird.. Deshalb gibt es eine positive reelle Zahl β und ein $x_\gamma \in S$, so dass $\tilde{f}(x_\gamma) = (\alpha + \gamma) y$ für alle $\gamma \in]0, \beta]$. Wegen $f(x) = \alpha y < (\alpha + \gamma) y = \tilde{f}(x_\gamma)$ folgt mit S. 2. 14., dass für alle $\gamma \in]0, \beta]$ gilt $x \le x_\gamma$. Damit erfüllt f die Voraussetzung (i) von L. 2. 3.

Wegen L. 2. 2. und $f(0) = 0$ gibt es für alle $x \in R_+^n$ eine $M-$Matrix $B(x)$ mit $f(x) = B(x) \cdot x$ und $B(x) \ge \frac{df}{dx}(0)$. Dann ist auch $B(x) \cdot x \ge \frac{df}{dx}(0) \cdot x$ für alle $x \in R_+^1$ und damit:

$$\|f(x)\|_2^2 = \|B(x) \cdot x\|_2^2 \qquad (2.\ 26.)$$

$$\ge \left\|\frac{df}{dx}(0) \cdot x\right\|_2^2.$$

Die durch $C := \frac{df}{dx}(0)^T \cdot \frac{df}{dx}(0)$ definierte Matrix ist wegen

$$\left(\left(\frac{df}{dx}(0)\right)^T \frac{df}{dx}(0)\right)^T = \left(\frac{df}{dx}(0)\right)^T \cdot \frac{df}{dx}(0)$$

symmetrisch. Deshalb gib es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $z^1, z^2, ...z^n$ von C und die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sind reell.

Sei $x \in R_+^n$ und $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot z^i$ eine Basisdarstellung von x. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{df}{dx}(0) \cdot x \right\|_2 &= x^T \left(\frac{df}{dx}(0)\right)^T \cdot \frac{df}{dx}(0) \cdot x \qquad (2.\ 27.)\\
&= x^T C x \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i z^i\right)^T \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j C z^j\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i z^i\right)^T \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j z^j\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \lambda_j \left(z^i\right)^T z^j \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \lambda_j \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i \\
&\geq \left(\min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j\right) \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 .
\end{aligned}$$

Wegen

$$z^T C z = \left(\frac{df}{dx}(0) \cdot z\right)^T \cdot \frac{df}{dx}(0) \cdot z \geq 0, \quad \forall z \in R^n$$

ist $C > 0$. Da C außerdem invertierbar ist, folgt:

$$\lambda := \min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j > 0 .$$

Wegen

$$\|x\|_2^2 = x^T x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j (z^i)^T z^j = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$$

ergibt sich jetzt aus (2. 27.) – (2. 28.):

$$\| f(x)\|_2^2 \geq \lambda \|x\|_2^2 .$$

Unter Benutzung dieser Abschätzung erhält man für ein $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ nämlich $\delta := \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}$, so dass für alle $x \in R_+^n$ mit $\|x\|_2 \geq \delta$ gilt:

$$\begin{aligned}\| f(x)\| &\geq \sqrt{\lambda}\cdot\|x\| \\ &\geq \sqrt{\lambda}\cdot\frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Also ist Bedingung (i) von L. 2. 3. erfüllt.

Durch Anwendung von L. 2. 3. ergibt sich, dass zu jedem $y \in R_+^n$ ein $x \in R_+^n$ existiert mit $f(x) = y.$ Dieses x ist wegen S. 2. 15. eindeutig bestimmt und hängt wegen L. 2. 3. stetig von y ab.

Wegen $\det\left(\frac{d\tilde{f}}{dx}(0)\right) \neq 0$ ist $\tilde{f}$ im Nullpunkt ein lokaler Diffeomorphismus. Es gibt also eine offene Umgebung $U(0)$ und eine stetige Abbildung $\bar{o} : U(0) \to R^n$ mit $\lim_{y\to 0}\frac{\bar{o}(y)}{\|y\|_2}$, so dass wegen $\tilde{f}(x) = 0$ für alle $y \in \tilde{f}(U(0))$ gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{f}^{-1}(y) &= \tilde{f}^{-1}(0) + \frac{d\tilde{f}^{-1}}{dy}(0)(y-0) + \bar{o}(y-0) \\ &= \left(\frac{d\tilde{f}}{dx}(0)\right)^{-1} + o(y).\end{aligned}$$

Daraus folgt für $y \in R_+^n$:

$$f^{-1}(y) = \left(\frac{df}{dx}(0)\right)^{-1} y + o(y)$$

mit einer Abbildung $o: R_+^n \to R^n$, die wegen der Stetigkeit von f^{-1} stetig ist und für die wegen $o \mid R_+^n \cap (o) \equiv \bar{o}$ gilt: $\lim\limits_{y \to 0} \frac{o(y)}{\|y\|_2} = 0$.

$(\Leftarrow)$

Wir nehmen an, dass die Umkehrabbildung $f^{-1}: R_+^n \subset f(R_+^n) \to R_+^n$ existiert und stetig ist und dass für alle $y \in R_+^n$ gilt:

$$f^{-1}(y) = My + o(y),$$

wobei $M \in M_M$ und $o: R_+^n \to R^n$ eine stetige Abbildung mit $\lim\limits_{y \to 0} \frac{o(y)}{\|y\|_2} = 0$ ist.

Die Abbildung $\tilde{f}$ ist im Nullpunkt stetig differenzierbar. Es gibt also eine offene Menge $U(0)$ und eine Abbildung $\tilde{o}: U(0) \to R^n$ mit, so dass für alle $x \in U(0)$ gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \tilde{f}(0) + \frac{d\tilde{f}}{dx}(0)(x-0) + \tilde{o}(x-0)\\ &= \frac{d\tilde{f}}{dx}(0)x + \tilde{o}\,x.\end{aligned}$$

Damit erhält man für alle $y \in R_+^n$ mit $f^{-1}(y) \in U(0)$:

$$\begin{aligned}y &= \tilde{f}(f^{-1}(y))\\ &= \tilde{f}(My + o(y))\\ &= \frac{df}{dx}(0)My + \frac{df}{dx}(0)o(y) + \tilde{o}(My + o(y))\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(E - \frac{df}{dx}(0)M)y = \frac{df}{dx}(0)o(y) + \tilde{o}(My + o(y))$$

und weiter

$$(E - \frac{df}{dx}(0)M)\frac{y}{\|y\|_2} = \frac{df}{dx}(0)\frac{o(y)}{\|y\|_2} + \frac{\tilde{o}(my + o(y))}{\|y\|_2}.$$

Nach Definitionen der Abbildungen o und $\tilde{o}$ geht die rechte Seite für $y \to 0$ gegen Null.

Also ist $\left(E - \frac{df}{dx}(0)M\right) = 0$, d.h. $M = \left(\frac{df}{dx}(0)\right)^{-1}$. Weiter muss gelten, dass $\left(\frac{df}{dx}(0)\right)^{-1} \geq 0$ ist. Denn wäre das nicht der Fall, so gäbe es ein $y \in R_+^n$, derart dass eine Komponente von $f^{-1}(y) = \left(\frac{df}{dx}(0)\right)^{-1} + o(y)$ negativ wäre. Also ist $\frac{df}{dx}(0)$ eine $M-$Matrix .

q . e. d.

B. 2. 21.
Sandberg gibt zur Lösung des Problems (P. 2. 1'.) mit (B. 3.). B(5) – B(17) ein globales Newtonsches Iterationsverfahrens an, für dessen Konvergenz zusätzlich die (einschneidende) Voraussetzung notwendig ist, dass

$$b: \text{ konkav} \qquad \text{(B. 18.)}$$

oder speziell wegen (B. 3.), (B. 15.)

$$\frac{db^j}{dx_j}(x_j^1) \geq \frac{db^j}{dx_j}(x_j^2), \ \forall x_j^2 \geq x_j^1 \geq 0, \ j = 1, \ldots, n, \qquad \text{(2. 28.)}$$

gilt.
Das Verfahren wird im Kapitel III näher untersucht [Vgl. S. 3. 19.].

B. 2. 22.
Sandberg gibt einen weiteren Existenzsatz an, für den nicht alle in B. 2. 18. gemachten Voraussetzungen benötigt werden und der deshalb wesentlich allgemeiner als S. 2. 16. ist. Für unseren Beweis wird lediglich L. 2. 3. benötigt.

S. 2. 17.
Die S eine offene Umgebung des R_+^n und $f: S \rightarrow R^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $f(0) = 0$. Sei $\frac{df}{dx}(0)$ eine $M-$Matrix für alle $x \in S$. Dann gibt es ein eindeutiges $x \in R_+^n$ mit $f(x) = y$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in R_+^n$ mit $\|x\|_2 \geq \delta$ gilt $\|f(x)\|_2 \geq \varepsilon$.

Beweis:

Siehe Sandberg, S. 1181f.

B. 2. 23.
Im Folgenden wird ein statisches volkswirtschaftliches Verflechtungsmodell diskutiert, das im gewissen Sinne eine Verallgemeinerung der Problemstellung von Sandberg darstellt:

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.), wobei die Aufwandsfunktion $b: R_+^n \rightarrow R_+^n$ folgende Bedingungen erfüllt:

1) (B. 7.)
2) (B. 16.)
3) (B. 18.)

d.h.

$$b\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x^2\right) \geq \lambda b(x^1) + (1-\lambda) b(x^2),\ \forall x^1, x^2 \in R_+^n;\ \forall \lambda > 1 \qquad (2.\ 29.)$$

4) b ist für alle $x \in R_+^n$ Frechet-differenzierbar, d. h. es existiert $b'(x)$ für alle $x \in R_+^n$

Bedingung (B. 29.) impliziert insbesondere (B. 9.).
Bedingung (4) ist eine Verallgemeinerung der Bedingung (B. 15.). Sie bedeutet: Jede infinitesimal kleine Änderung der Gesamtproduktion hat eine infinitesimal kleine Änderung vom Aufwand zur Folge.

B. 2. 24.
Wegen der Differenzierbarkeit von $b(x)$ resultiert aus (2. 29.) die Ungleichung

$$b(x^2) - b(x^1) \leq b'(x^1)(x^2 - x^1),\ \forall x^1, x^2 \in R_+^n, \qquad (2.\ 30.)$$

wobei $b'(x)$ die Frechet-Ableitung der Abbildung b im Punkt x ist.

B. 2. 25.
Sei

$$b_y(x) := b(x) + y, \quad y \in R_+^n. \qquad (2.\ 31.)$$

Offensichtlich auch $b_y(x)$ die Bedingung (B. 18.) und folglich die Ungleichung (2. 30.):

$$\begin{aligned} b(x^2) - b(x^1) &\leq b_y'(x^1)(x^2 - x^1) \\ &= b'(x^1)(x^2 - x^1). \end{aligned} \qquad (2.\ 32.)$$

Wie in B. 2. 10. bemerkt, ist die Lösbarkeit von (P. 2. 1'.) unter den Voraussetzungen 1) – 5) äquivalent der Lösbarkeit von

$$x = b_y(x). \qquad (2.\ 33.)$$

S. 2. 18.
Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.), wobei die Aufwandsfunktion $b: R_+^n \to R_+^n$ die in B. 2. 23. gemachten Voraussetzungen erfüllen möge. Ferner sei ein festes $x^0 \in R_+^n \setminus \{0\}$ und eine Konstante $\lambda \in [0,\ 1[$.
Dann gilt:

$$\left\langle b(x^0) \leq \lambda x^0 \right\rangle \ \Leftrightarrow\ \left\langle \text{(P. 2. 1'.) ist global lösbar} \right\rangle.$$

Beweis:

$(\Rightarrow)$

Es gilt

$$b_y(y) \geq y. \tag{2. 34.}$$

Sei

$$t_0 > 0: \quad y \leq t_0(1-\lambda)x^0.$$

(Die Existenz von t_0 ist dadurch gesichert, dass $x^0 > 0$ gilt.)
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $t_0 > 1$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} b_y(t_0 x^0) &= b(t_0 x^0) + y \\ &\leq t_0 b(x^0) + y && (\because \text{ (B. 9.)}) \\ &\leq t_0 \lambda x^0 && (\because \text{ (B. 19.)}) \\ &\leq t_0 x^0. && \text{(2. 35.)} \end{aligned}$$

$$y \leq t_0 x^0 \qquad (\because \text{ (B. 7.), (B. 20) })$$

$$y \leq x \leq t_0 x^0.$$

Da die Menge $[y,\ t_0 x]$ beschränkt, konvex und abgeschlossen ist, hat die Abbildung b_y nach dem Fixpunktsatz von Brouwer auf dieser Menge mindestens einen Fixpunkt.
Außerdem gilt für die Folgen

$$\{x^{(\nu)}\}, \quad x^0 := y, \quad x^{(\nu)} := b_y(x^{(\nu-1)}), \quad \nu \in N$$

bzw.

$$\{\tilde{x}^{(\nu)}\}, \quad \tilde{x}^{0} := y, \quad \tilde{x}^{(\nu)} := b_y(\tilde{x}^{(\nu-1)}), \quad \nu \in N.$$

$$\lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)} = x^*$$

bzw.

$$\lim_{\nu\to\infty} \tilde{x}^{(\nu)} = x^*.$$

Dabei gilt:

$$x^* = b_y(x^*)$$

bzw.

$$\tilde{x}^* = b_y(\tilde{x}^*).$$

Es gilt ferner:

$$x^{(\nu-1)} \le x^{(\nu)}, \quad \nu \in N$$

$$\tilde{x}^{(\nu-1)} \le \tilde{x}^{(\nu)}, \quad \nu \in N$$

$$x^{(\nu)} \le \tilde{x}^{(\nu)}, \quad \nu \in N .$$

$(\Leftarrow)$

Es gilt laut Voraussetzung

$$0 \le x^0 \le b(x^0) + y^0.$$

Sei nun

$$\beta > 0: \quad y^0 \ge \beta x^0.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} b(x^0) &= x^0 + y^0 \\ &\le x^0 - \beta x^0 \\ &= (1-\beta)x^0 \\ &= \lambda x^0 \end{aligned}$$

mit

$$1 - \beta := \lambda.$$

q. e. d.

S. 2. 19.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.). Dabei möge die Aufwandsfunktion $b: R_+^n \to R_+^n$ die Bedingung (B. 7.) erfüllen.

Dann gilt:

$\langle$B. 19.$\rangle \Leftrightarrow \langle$(P. 2. 1'.) ist global lösbar$\rangle$.

Beweis:
Der Beweis folgt aus dem Satz von Birkhoff und aus der Tatsache, dass eine monotone Abbildung bezüglich der Menge $\left[y,\ t_0 x^0\right]$ invariant ist.

q. e. d.

B. 2. 26.
Im Gegensatz zum Satz S. 2. 18. garantieren die Bedingungen von S. 2. 19. nicht die Konvergenz der Folgen

$$\{x^{(\nu)}\},\quad x^0 := y,\quad x^{(\nu)} := b_y(x^{(\nu-1)}),\quad \nu \in N$$

bzw.

$$\{\tilde{x}^{(\nu)}\},\quad \tilde{x}^0 := y,\quad \tilde{x}^{(\nu)} := b_y(\tilde{x}^{(\nu-1)}),\quad \nu \in N$$

gegen eine Lösung des Problems (P. 2. 1’.).

B. 2. 27.
Die Bedingung (B. 19.) garantiert nicht die Eindeutigkeit der Lösung von (P. 2. 1’.). Hierzu könnte folgendes Beispiel betrachtet werden.
Sei

$$b(x_1, x_2) := \left(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}\right)^T,\quad y := (0,\ 2)^T.$$

$b(x)$ erfüllt die in B. 2. 23. angeführten Bedingungen und (B. 19.).

(Zur Überprüfung von (B. 19.) genügt es, $x^0 = (4,\ 4)^T$ zu wählen, woraus $\lambda = \frac{1}{2} < 1$ resultiert.)

S. 2. 21.
Gegeben sei das Problem (P. 2. 1’.), wobei die Aufwandsfunktion $b: R_+^n \to R_+^n$ die in B. 2. 23 angeführten Bedingungen erfüllen möge. Esa gelte ferner (B. 19.) und

$$\langle b'(x) \text{ ist für kein } x \in R_+^n \setminus \{0\} \text{ zerlegbar.}\rangle \qquad \text{(B. 20.)}$$

Dann gilt folgendes:

A. Das Problem (P. 2. 1’.) hat für jedes $y^0 \in R_+^n \setminus \{0\}$ eine eindeutige Lösung $x^* = x(y)$.
B. Die Folgen

$$\{x^{(\nu)}\},\quad x^0 := y,\quad x^{(\nu)} := b_y(x^{(\nu-1)}),\quad \nu \in N$$

bzw.

$$\{\tilde{x}^{(\nu)}\},\quad \tilde{x}^{0} := y,\quad \tilde{x}^{(\nu)} := b_y(\tilde{x}^{(\nu-1)}),\quad \nu\in N$$

konvergieren monoton gegen x^*. Dabei gilt:

$$x^{(\nu-1)} \le x^{(\nu)} \le x^* \le \tilde{x}^{(\nu)} \le \tilde{x}^{(\nu-1)},\quad \nu\in N.$$

C. Die Folge

$$\overset{\approx}{x}^{(\nu)} := b_y(\overset{\approx}{x}^{(\nu-1)}),\quad \nu\in N,$$

konvergiert für ein beliebiges $\overset{\approx}{x}^{0} \in R^n_+ \setminus \{0\}$ gegen x^*

Beweis:
A:

Das Problem (P. 2. 1'.) möge für $y^0 > 0$ mindestens zwei verschiedene Lösungen $\bar{x}^1, \bar{x}^2 > 0$ haben:

$$\bar{x}^1 = b(\bar{x}^1) + y^0$$

$$\bar{x}^2 = b(\bar{x}^2) + y^0.$$

Offensichtlich gehört dann einer der Vektoren $(\bar{x}^1 - \bar{x}^2)$, $(\bar{x}^2 - \bar{x}^1)$ der Menge R^n_+ nicht an. Es gelte z.B. $(\bar{x}^1 - \bar{x}^2) \notin R^n_+$. Dann hat man:

$$(\bar{x}^1 - \bar{x}^2) = b(\bar{x}^1) - b(\bar{x}^2)$$

$$\le b'(\bar{x}^2)(\bar{x}^1 - \bar{x}^2).$$

Da der Operator b monoton ist, ist seine Frechet-Ableitung $b'(x)$ ($x\in R^n_+$) ein positiver linearer Operator. Unter Berücksichtigung von der obigen Ungleichung und nach dem Satz über Abschätzung (nach unten) des Spektralradius eines positiven linearen Operators [Vgl. Krasnoselski, M. A. u a.: Näherungsverfahren zur Lösung von Operatorgleichungen, Akademie-Verlag, Berlin, 1973] erhält man:

$$r\left[b'(\bar{x}^2)\right] \ge 1.$$

Setzt man in (2. 30.) $x^2 = 0,\ x^1 = \bar{x}^2$ ein, so ergibt sich

$$-b(\bar{x}^2) \le -b'(\bar{x}^2)\,\bar{x}^2 ,$$

d.h.

$$b(\bar{x}^2) \ge b'(\bar{x}^2)\,\bar{x}^2 .$$

Also

$$x^2 = b(\bar{x}^2) + y^0$$

$$> b(\bar{x}^2)$$

$$\ge b'(\bar{x}^2),$$

d.h.

$$b'(\bar{x}^2)\,\bar{x}^2 < \bar{x}^2 .$$

Aus der letzten Ungleichung und dem Satz über die strenge Abschätzung (nach oben) des Spektralradius eines linearen positiven nicht zerlegbaren Operators [ebenda]resultiert:

$$r\left[\, b'(\bar{x}^2) \,\right] \le 1.$$

Dies widerspricht jedoch der Behauptung $r\left[\, b'(\bar{x}^2) \,\right] \ge 1$.

B:
Beim Beweis vom Satz S. 2. 18. wurde gezeigt, dass

$$x^{(\nu)} \le \tilde{x}^{(\nu)} , \quad \nu \in N$$

gilt und dass die Folgen $\{\left\{x^{(\upsilon)}\right\}\}$, $\{\bar{x}^{(\upsilon)}\}$, $\upsilon \in N \cup \{0\}$ monoton gegen die Lösungen x^*, $\bar{x}^*$ konvergieren.. Auf Grund der Eindeutigkeit der Lösungen $x^* = \bar{x}^*$ schließen wir auf die Konvergenz der beiden genannten Folgen gegen x^*.

C:
Wir beweisen nun, dass die Folge $\{\overset{\approx}{x}^{(\upsilon)}\}$, $\upsilon \in N \cup \{0\}$, für jede Anfangslösung $\overset{\approx}{x}^{0}$ gegen x^*konvergiert:

Sei t_0 eine Zahl, die folgende Bedingung erfüllt:

(Letzte Aktualisierung: 17.07.09)