I

Das lineare Input-Output-Modell

D. 1. 1.
Unter dem *statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodell mit linearen Aufwandsfunktionen* verstehen wir:

$$x = b(x) + y \qquad \text{(P. 1. 1.)}$$

mit

$$b: R_+^n \to R_+^n, \quad b(x) := Ax, \quad A \in M_{(n,n)}, \quad A \geq 0,$$

$$x := (x_i) \in R_+^n,$$

$$y := (y_i) \in R_+^n,$$

oder in Summenschreibweise:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad \text{(P. 1. 1'.)}$$

Hier sind:

n:	die Anzahl der Sektoren in der Volkswirtschaft,
$a_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$:	der Materialaufwand des $i-$ten Sektors zur Herstellung einer Einheit des Produktes des $j-$ten Sektors (kurz: „*Materialaufwandskoeffizient*“),
$x_i, \; i = 1, 2, \ldots, n$:	die Gesamtproduktion des $i-$ten Sektors,
$y_i, \; i = 1, 2, \ldots, n$:	die Endnachfrage des $i-$ten Sektors.

S. 1. 1.

$$A: R_+^n \to R_+^n \quad \text{ist isoton} \quad \Leftrightarrow \quad A \geq 0.$$

Beweis:
$"\Rightarrow"$
Sei $A: R_+^n \to R_+^n$ isoton. Dann gilt:

$$e^i \geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$Ae^i \geq 0, \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

$$A \geq 0.$$

" $\Leftarrow$ "
Sei $A \geq 0.$ Dann folgt aus

$$x^1 \leq x^2$$

auch

$$Ax^1 \leq Ax^2.$$

q .e. d.

B. 1. 1.
Für ein gegebenes $y \in R_+^n$ lässt sich (P. 1. 1.) zu

$$y = x - Ax$$

bzw.

$$y = Fx \tag{1. 1.}$$

mit

$$F := (E - A)$$

schreiben.

D. 1. 2.
Eine reelle Matrix $F := (f_{ij}) \in M_{(n,n)}$ mit $f_{ij} \leq 0,\ \forall i \neq j$, heißt $M-Matrix$, in Zeichen $F \in M_M$, wenn $\det F \neq 0$ und $F^{-1} \geq 0$. F heißt dann auch *nichtnegativ invertierbar*.

S. 1. 2.
Gegeben sei

$$F := (f_{ij}) \in M_{(n,n)}, \qquad f_{ij} \leq 0,\ \forall i \neq j.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $F \in M_M$.

b) Für ein $y \in R_n^+ \setminus \{0\}$ es existiert ein $x \in R_+^n$, derart, dass $Fx = y$ gilt.

c) Für alle $y \in R_n^+$ es existiert ein $x \in R_+^n$, derart, dass $Fx = y$ gilt.

d)

$$\det\begin{pmatrix} f_{11} & . & . & . & f_{1p} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ f_{p1} & . & . & . & f_{pp} \end{pmatrix} > 0, \qquad p = 1, 2, ..., n. \tag{1. 2.}$$

(Die Determinanten in (1. 2.) nennt man *führende Hauptminoren*.)

e)

$$\det\left(f_{ij}\right)_{i,j\in L} > 0, \quad \forall L \subset \{1, 2, ..., n\} \tag{1. 3.}$$

Die Determinanten (1. 3.) nennt man *Hauptminoren*.

Beweis:

1) „b $\Rightarrow$ d“ (Induktion)

<u>*Induktionsanfang:*</u>

Sei $n = 1$. Das Gleichungssystem (1. 1.) lautet dann:

$$f_{11}x_1 = y_1.$$

Wenn $x_1 \geq 0$ ist für ein $y_1 > 0$, dann muss auch $f_{11} > 0$ sein.

<u>*Induktionsannahme:*</u>

Die Aussage ist richtig für $n-1$. Nach b) hat $Fx = y$ eine Lösung $x \in R_+^n$ für ein $y \in R_+^n \setminus \{0\}$. Aus der ersten Gleichung erhält man:

$$f_{11}x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^{2} f_{ij}x_j. \tag{1. 4.}$$

Wegen $y_1 > 0$ und $f_{ij} \leq 0,\ x_j \geq 0,\ j = 2, 3, ..., n,$ ist $f_{11}x_1 > 0$, und damit $f_{11} > 0$.
Jetzt wenden wir das Gaußsche Eliminationsverfahren so auf das Gleichungssystem $Fx = y$ an, dass wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & . & . & . & f_{1n} \\ 0 & f_{22}^* & . & . & . & f_{2n}^* \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 0 & f_{2n}^* & . & . & . & f_{nn}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2^* \\ . \\ . \\ . \\ y_n^* \end{pmatrix}. \tag{1. 5.}$$

Dabei ist:

$$f_{ij}^* := f_{ij} - f_{i1}\frac{f_{1j}}{f_{11}}, \quad i, j = 2,3,...,n,$$

$$y_i^* := y_i - f_{i1}\frac{y_1}{f_{11}}, \qquad\qquad i = 2,3,...,n.$$

Wegen $f_{ij} \le 0$ für $i, j = 2,3,...,n,\ i \ne j,$ und $y_i > 0$ für $i = 2,3,...,n$ folgt:

$$f_{ij}^* \le 0, \quad i, j = 2,3,...,n; \ \ i \ne j,$$

$$y_i^* > 0, \quad i = 2,3,...,n.$$

Also erfüllt das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=2}^{n} f_{ij}^* x_j = y_i^*, \quad i = 2,3,...,n,$$

die Bedingung b) und wir erhalten nach Induktionsvoraussetzung:

$$\det\begin{pmatrix} f_{22}^* & . & . & . & f_{2l}^* \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ f_{l2}^* & . & . & . & f_{ll}^* \end{pmatrix} > 0, \quad l = 2,3,...,n.$$

Damit folgt:

$$\det\begin{pmatrix} f_{11} & . & . & . & f_{1p} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ f_{p1} & . & . & . & f_{pp} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & . & . & . & f_{1l} \\ 0 & f_{22}^* & . & . & . & f_{2l}^* \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 0 & f_{l2}^* & . & . & . & f_{ll}^* \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} f_{22}^* & . & . & . & f_{2l}^* \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ f_{l2}^* & . & . & . & f_{ll}^* \end{pmatrix} > 0, \quad \mathrm{l} = 2,3,...,n.$$

2) „d $\Rightarrow$ c“ (Induktion)

Sei $n = 1.$ Dann hat das Gleichungssystem $f_{11}x_1 = y_1$ wegen $f_{11} > 0$ für jedes $y_1 \ge 0$ die Lösung:

$$x_1 = \frac{y_1}{f_{11}} \ge 0.$$

Induktionsannahme:
Die Aussage ist richtig für $n-1$. Wegen d) gilt insbesondere $f_{11} > 0$, so dass wir in 1) die Gaußsche Elimination auf das Gleichungssystem $Fx = y$ mit beliebigem $y \geq 0$ anwenden können. Wie oben erhalten wir das System:

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}^{*} x_j = y_i^{*}, \quad i = 2,3,...,n,$$

mit

$$f_{ij}^{*} < 0, \quad i, j = 2,3,...,n; \ i \neq j,$$

$$y_i^{*} \geq 0, \quad i = 2,3,...,n.$$

Wegen

$$\det\begin{pmatrix} f_{22}^{*} & . & . & . & f_{2l}^{*} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ f_{l2}^{*} & . & . & . & f_{ll}^{*} \end{pmatrix} = \frac{1}{t_{11}} \det\begin{pmatrix} f_{11} & . & . & . & f_{1l} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ f_{l1} & . & . & . & f_{ll} \end{pmatrix} > 0, \qquad p \in \{2,3,...,n\},$$

hat das obige Gleichungssystem nach Induktionsannahme eine Lösung $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, ..., x_n \geq 0$ für diese y_i^{*}, $i = 2,3,...,n$.
Aus (1. 4.) erhalten wir:

$$x_1 = \frac{1}{f_{11}}(y_1 - \sum_{j=2}^{n} f_{1j} x_j) \geq 0.$$

Damit haben wir eine Lösung von (1. 5.) gefunden, die wegen der Äquivalenz der Gleichungssysteme auch $Fx = y$ löst.

3) „c$\Rightarrow$b“ ist offensichtlich.

4) „e$\Rightarrow$d“:
Diese Implikation ist auch klar. Nehmen wir an, dass c) erfüllt ist. Dann ist c) auch für jedes Gleichungssystem erfüllt, dass durch gleichartiges Umnummerieren der Zeilen und Spalten von F entsteht. So kann jede Hauptuntermatrix zur führenden Hauptuntermatrix gemacht werden, wobei sich ihre Determinante nicht ändert. Damit folgt die Bedingung e), indem man die Implikation) „e$\Rightarrow$d“ auf das umnummerierte System anwendet.

5) „a$\Rightarrow$c“:
Sei $F \in M_M$. Dann hat das Gleichungssystem $Fx = y$ die eindeutige Lösung:

$$x = F^{-1} y \geq 0, \quad \forall y \in R_{+}^{n}.$$

6) „c$\Rightarrow$d“:
Nehmen wir an, dass c) erfüllt ist. Dann folgt wegen d) die Existenz von F^{-1}, und wir erhalten eine eindeutige Lösung als $x = F^{-1}y$. Es ist also

$$x = F^{-1}y \geq 0, \quad \forall y \in R_+^n.$$

Damit gilt $F^{-1}e^i \geq 0,\ i = 1,2,...,n,$ also $F^{-1} \geq 0$.

q .e. d.

B. 1. 2.
Die Bedingungen d) und e), auch bekannt als Hawkins-Simon-Bedingung, erlauben wegen der Komplexität der Definition einer Determinante keine direkte ökonomische Interpretation. Wir können aber aus Bedingung e) schließen, dass

$$a_{ii} < 1, \quad i = 1,2,...,n,$$

gilt. Daraus folgt

$$a_{ii}x_i < x_i, \quad = 1,2,...,n.$$

Das heißt, dass die Menge des Produktes i, die zur Herstellung seiner eigenen Gesamtproduktion x_i eingesetzt wird, kleiner als x_i. Wäre

$$a_{ii}x_i \geq x_i \quad \text{für ein } i \in \{1,2,...,n\},$$

so wäre der Sektor unproduktiv, denn vom Produkt j würde mehr eingesetzt als ausgebracht und er hätte damit keine positive Gesamtproduktion. In diesem Falle wäre auch die Bedingung b) nicht erfüllt, die besagt, dass für eine Endnachfrage eine nichtnegative Produktion existiert.
Man beachte, dass in den Bedingungen b) und c) die Eindeutigkeit nicht gefordert wird.

S. 1. 3.
Sei

$$F := E - A$$

mit

$$A \in M_{(n,n)}; \quad A \geq 0.$$

Dann gilt für alle $x^1, x^2 \in R_+^n,\ x^1 \leq x^2,\ x_i^1 = x_i^2$ für mindestens ein $j \in \{1,2,...,n\}$, die Beziehung

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}x_j^1 \geq \sum_{j=1}^{n} f_{ij}x_j^2, \quad i \in \{1,2,...,n\}.$$

Beweis:
Sei $i \in \{1,2,...,n\}$ mit $x_i^1 = x_i^2$. Dann gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}x_j^1 - \sum_{j=1}^{n} f_{ij}x_j^2 = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_j^1 - x_j^2)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - a_{ij})(x_j^1 - x_j^2)$$
$$= x_i^1 - x_i^2 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j^1 - x_j^2)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j^2 - x_j^1)$$
$$\geq 0.$$

q. e. d.

B. 1. 3.
Die Aussage von S. 1. 3. lässt sich folgendermaßen ökonomisch interpretieren:
Eine Erhöhung der Gesamtproduktion eines Teils des produktiven Bereichs führt zum Rückgang der Endnachfrage bei den Sektoren, deren Gesamtproduktion konstant geblieben ist.

S. 1. 4.
Sei $F \in M_M$. Dann gilt:

$$\left\langle Fx^1 \geq Fx^2,\ x^1, x^2 \in R_+^n \right\rangle \ \Rightarrow\ x^1 \geq x^2.$$

Beweis:
Es gilt:

$$x^1 = F^{-1}Fx^1$$
$$\geq F^{-1}Fx^2$$
$$= x^2.$$

q. e. d.

B. 1. 4.
S. 1. 4. bedeutet: Eine Erhöhung der Endnachfrage erfordert eine Erhöhung der Gesamtproduktion.

S. 1. 5.
Gegeben sei

$$A \in M\left(n,n\right), \quad A \geq 0.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $(E-A)\in M_M$.

b) $\rho(A)=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|<1$,

λ_i, $i=1,2,...,n$: $i-$ter Eigenwert der Matrix A,

$\rho(A)$: der Spektralradius von A.

c) Es gibt eine Norm mit

$$\|A\|<1.$$

d) $\lim\limits_{l\to\infty} A^l=0$.

e) Die Neumannsche Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} A^i$ konvergiert.

Beweis:

1)

„b $\Rightarrow$ d" :

Sei $\rho(A)<1$. Dann gibt es eine Norm mit

$$\|A\|\le\rho(A)+\varepsilon<1 \text{ für eine geeignetes } \varepsilon>0.$$

Es gilt ferner wegen

$$\|A^l\|\le\|A\|^l$$

die Behauptung

$$\lim_{l\to\infty} A^l=0.$$

„d $\Rightarrow$ b" :

Wir nehmen an:

$$\exists \text{ ein } \lambda: \ |\lambda|\ge 1.$$

Sei $x\neq 0$ der zugehörige Eigenvektor. Dann gilt

$$A^l x=\lambda^l x, \ \forall l\in N,$$

und die Folge $\{A^{(l)}x\}_{l\in N}$ geht nicht gegen Null.

2)

„b $\Rightarrow$ e" :

Sei $\rho(A) < 1$ und $Ax = \lambda x$. Wegen

$$(E - A)x = x - Ax$$

$$= x - \lambda x$$

$$= (1 - \lambda)x$$

ist $(1-\lambda)$ Eigenwert von $(E - A)$ zum Eigenvektor x von $(E - A)$.
Es gilt ferner:

$$|1-\lambda| \geq |1-1-|\lambda||$$

$$> 0, \qquad (\because |\lambda| < 1)$$

d.h. $(E - A)$ ist invertierbar.
Weiter ergibt sich aus

$$(E - A)(E + A + ... + A^{l-1}) = E - A^l$$

durch Multiplikation mit $(E - A)^{-1}$ von links

$$E + A + ... + A^{l-1} = (E - A)^{-1} - (E - A)^{-1} A^l. \qquad (1.\ 6.)$$

Die rechte Seite von (1. 6.) geht wegen 2) gegen $(E - A)^{-1}$ für $l \to \infty$, d.h.

$$(E - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i. \qquad (1.\ 7.)$$

„e $\Rightarrow$ b“ :
Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} A^i$ folgt $\lim_{l\to\infty} A^l = 0$. Wegen 1) ist dann $\rho(A) < 1$. Wie oben erhält man (1. 7.) und sieht, dass die Reihe gegen $(E - A)^{-1}$ konvergiert.

3)
„c $\Rightarrow$ b“ :

Zunächst wird folgende Aussage bewiesen:
Sei $A \in M(n,n)$ reell. Dann gilt

$$\rho(A) \leq \|A\|. \qquad (1.\ 8.)$$

Es gelte

$$Ax = \lambda x, \quad \lambda \in C, \ x \in C^n.$$

Daraus folgt:

$$\|A\| \cdot \|x\| \geq \|Ax\|$$

$$= \|\lambda x\|$$

$$= |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Wegen $x \neq 0$ folgt hieraus $\|A\| \geq |\lambda|$ und damit die Behauptung.

Die Aussage „c $\Rightarrow$ b“ folgt nun wegen (1. 8.): $\rho(A) \leq \|A\| < 1$.

4)
„b $\Rightarrow$ c“ :

$$\exists \varepsilon > 0: \ \rho(A) + \varepsilon < 1. \qquad (\because \rho(A) < 1)$$

Damit ist die Existenz einer Norm mit

$$\|A\| < \rho(A) + \varepsilon < 1$$

gesichert.

5)
„b $\Rightarrow$ a“ :

Ist $\rho(A) < 1$, so existiert $(E - A)^{-1}$ nach „b $\Rightarrow$ e“ und man hat

$$(E - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i.$$

$(E - A)^{-1}$ ist nichtnegativ, weil jeder Summand der Reihe nichtnegativ ist. Trivialerweise gilt

$$\delta_{ij} - a_{ij} \leq 0, \ i, j = 1, 2, \ldots, n; \ i \neq j.$$

„a $\Rightarrow$ b“ :

Sei $(E - A)^{-1} \geq 0$ und λ ein Eigenvektor von A zum Eigenvektor $x \neq 0$. Dann ergibt sich

$$|\lambda| \left(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\right)^T \leq A\left(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\right)^T$$

und weiter

$$(E - A)\left(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\right)^T \leq (1 - |\lambda|)\left(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\right)^T.$$

Es folgt

$$\left(|x_1|,|x_2|,...,|x_n|\right)^T \leq (E-A)^{-1}\left(|x_1|,|x_2|,...,|x_n|\right)^T$$

und daraus wegen $x \neq 0$ und $(E-A)^{-1} \geq 0$

$$|\lambda| < 1.$$

q. e. d.

B. 1. 5.
Die Bedeutung von Aussage b) liegt in den durch (1. 8.) Beziehungen zwischen dem Spektralradius und einer Norm der Matrix und führt damit zur Interpretation von c).
Wegen $A \geq 0$ ist die Bedingung c) genau dann in der L_1- bzw. $L_\infty-$Norm erfüllt, wenn alle Spalten- bzw. Zeilennormen kleiner als 1 sind, d. h. A erfüllt die Brauer-Solow-Bedingung.
[Vgl.
Nikaido, Hukukane: Convex Structures and Economic Theory, New York-London 1968, S. 94,
Solow, Robert: On the Structure of Linear Models. In: Econometrica 20 (1952), S. 27-46,
Woodbury, Max A.: Properties of Leontief-Type Input-Output Matrices. In: Morgenstern, O. (Hrsg.): Economic Activity Analysis, New York-London 1954, S. 341-363].

Mit Hilfe einer Betrachtung unzerlegbarer Matrizen lässt sich die Bauer-Solow-Bedingung etwas abschwächen.
[Vgl. dazu: Solow, Robert: On the Structure of Linear Models. In: Econometrica 20(1952), S. 29-46].

Ist Bedingung c) in der $L_\infty-$Norm erfüllt, d.h. gilt

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| < 1,$$

so folgt

$$A \cdot (1,1,...1)^T = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}, \sum_{j=1}^n a_{2j},..., \sum_{j=1}^n a_{nj},\right)^T < (1,1,...1)^T.$$

Um von jedem Produkt eine Einheit auszubringen, muss also weniger als eine Einheit jedes Produktes eingesetzt werden.
Die Matrix $(E-A)$ kann durchaus eine $M-$Matrix sein, obwohl $\|A\|_\infty \geq 1$. S. 1. 5. garantiert in diesem Fall jedoch die Existenz einer (anderen) Norm mit $\|A\| < 1$.
Explizit können wir diese Norm folgendermaßen erhalten:

$$\exists x: \; x \geq (E-A)x > 0, \qquad (\because \text{ S. 1. 2. b)}$$

also

$$x_i \geq \sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - a_{ij})x_j > 0, \quad i = 1,2,...,n,$$

$$\frac{1}{x_i} \cdot \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - a_{ij}) x_j > 0, \quad i = 1, 2, ..., n, \qquad (\because x_i > 0)$$

$$0 < \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} x_j - \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$$= 1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} \cdot x_j}{x_i}, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{1. 9.}$$

Die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & . & . & . & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & . & . & . & x_n \end{pmatrix}$$

ist wegen $x_i > 0,\ i = 1, 2, ..., n,$ nichtsingulär, und es gilt

$$\left(\frac{a_{ij} x_j}{x_i} \right)_{i, j = 1, 2, ..., n} = P^{-1} A P.$$

Aus (1. 9.) folgt dann

$$\left\| P^{-1} A P \right\|_{\infty} < 1.$$

Wegen (1. 9.) haben wir damit eine Norm mit der gewünschten Eigenschaft gefunden.
Bei jeder $M-$Matrix können wir also eine Transformation angeben, dass die Zeilennormen positiv werden. Die transformierte Matrix $A^{-1}\left(E - A\right)P$ ist wieder eine $M-$Matrix , denn die Ähnlichkeitstransformation ändert die Eigenwerte nicht. Dieser Transformationsprozess bedeutet aber nichts anderes als die Wahl neuer Maßeinheiten für die Produkte.

Auch für die Aussagen d) und e) aus S. 1. 5.kann man eine anschauliche ökonomische Interpretation angeben. Dazu erinnern wir uns daran, dass der Koeffizient $a_{ij},\ i, j = 1, 2, ..., n,$ angibt, wie viele Einheiten des Produktes i zur Herstellung einer Einheit des Produktes j verwendet werden. Zur Herstellung des Produktes j werden aber unter Umständen noch andere von i verschiedenen Produkten benötigt, zu deren Produktion wiederum auf direktem oder indirektem Wege das Produkt i gebraucht wird.
Allgemein gibt

$$a_{ij}^{(p+1)} := \sum_{i_1=1}^{.} ... \sum_{i_p=1}^{n} a_{i,i_1} \cdot a_{i_1,i_2} ... a_{i_p j}, \quad p \geq 1$$

die Anzahl der Einheiten des Produktes i an, die über p Stufen zur Herstellung einer Einheit des Produktes j benötigt werden.
Wegen

$$A^p = (a_{ij}^p)$$

haben wir damit eine Interpretation der Potenzen der Matrix A gewonnen. Bedingung d) besagt somit, dass der indirekte Einfluss eines Produktes auf ein anderes mit wachsender Anzahl der Produktionsstufen gegen Null geht. Dies folgt natürlich auch aus der Konvergenz der Neumannschen Reihe.
Aussage e) gibt uns ein Berechnungsverfahren für die Inverse von $(E-A)$. Genauso gut kann man aber auch mittels

$$\begin{aligned} x &= (E-A)^{-1}y \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} A^i y \\ &= y + Ay + A^2 y + \ldots \end{aligned}$$

das Iterationsverfahren

$$\begin{cases} x^{(0)} := y \\ x^{(i+1)} := y + Ax^i, \quad i \geq 0 \end{cases}$$

ansetzen, das die Partialsummen $\sum_{i=0}^{\infty} A^i y$ berechnet und gegen den Produktionsvektor x konvergiert.
Dieses Verfahren können wir folgendermaßen interpretieren:
Zunächst stellt man die geforderte Endnachfrage y her. Die Ausbringung von y erfordert aber Ay als Einsatz. Um Ay zu produzieren, benötigt man wiederum $A(Ay)$ als Einsatz, usw. Als Summe erhält man schließlich das gesuchte x.

<u>D. 1. 3.</u>
Eine Abbildung

$$f : D \subset R^n \to R^n$$

heißt *kontrahierend* auf $D_0 \subset D$, wenn

$$\exists \text{ ein } \lambda \in [0,\ 1[:\ \| f(x^1) - f(x^2) \| \ \leq \lambda \| x^1 - x^2 \|,\ \forall x^1, x^2 \in D_0.$$

Die Zahl $\lambda \in R^1$ heißt dann *Kontraktionskonstante*.

<u>B. 1. 6.</u>
Wir nennen eine kontrahierende Abbildung of auch kurz *Kontraktion*. Die Kontraktionseigenschaft ist normabhängig; eine Abbildung kann in einer Norm kontrahierend sein, in einer anderen aber nicht.

Weiter sieht man sofort, dass eine Kontraktion stetig ist.

<u>S. 1. 6.</u>
Sei $A \in M(n,n)$: reell; $A \geq 0$. Dann gilt:

$$\left\langle (E-M) \in M_M \right\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{Die lineare Abbildung } A: R_+^n \to R_+^n \\ \text{ist auf } R_+^n \text{ kontrahierend.} \end{array} \right\rangle.$$

Beweis:
„$\Rightarrow$ “ :
Sei $(E-M) \in M_M$. Dann existiert nach S. 1. 5. c. eine Norm mit $\|A\| < 1$.
Wegen

$$\|Ax^1 - Ax^2\| = \|A(x^1 - x^2)\|$$

$$\leq \|A\| \cdot \|x^1 - x^2\|, \qquad \forall x^1, x^2 \in R^2$$

ist A kontrahierend auf $R_+^n \subset R^n$ mit der Kontraktionskonstante $\lambda := \|A\| < 1$.

„$\Leftarrow$ “ :
Sei die lineare Abbildung $A: R^n \to R^n$ kontrahierend auf R_+^n. Es gelte also

$$\|Ax^1 - Ax^2\| \leq \lambda \cdot \|x^1 - x^2\|, \qquad \forall x^1, x^2 \in R_+^n \wedge \text{ ein } \lambda < 1.$$

Für jedes $x \in R^n$ seien die Vektoren $x^+, x^- \in R_+^n$ durch

$$x_i^+ := \begin{cases} x_i & \text{falls} \quad x_i \geq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x_i < 0 \end{cases}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_i^- := \begin{cases} -x_i & \text{falls} \quad x_i \leq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x_i > 0 \end{cases}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

definiert. Offensichtlich gilt für alle $x \in R^n$

$$x = x^+ - x^n.$$

Damit folgt für alle $x \in R^n$:

$$\|Ax\| = \|A(x^+ - x^-)\|$$

$$= \|Ax^+ - Ax^-\|$$

$$\leq \lambda \left\| x^{+} - x^{-} \right\|$$

$$= \lambda \left\| x \right\|,$$

da $x^{+}, x^{-} \in R_{+}^{n}$ sind.
Mit dieser Abschätzung ergibt sich:

$$\left\| A \right\| = \sup_{\left\| x \right\| = 1} \left\| Ax \right\|$$

$$\leq \sup_{\left\| x \right\| = 1} \lambda \left\| x \right\|$$

$$= \lambda$$

$$< 1.$$

Nach S. 1. 5. a) gilt dann $\left(E - A \right) \in M_{M}$.

q. e .d.

D. 1. 4. (*Dual*)
Folgendes Problem wird als *dual* zu (P. 1. 1'.) bezeichnet:

$$p_{j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_{i} + v_{j}, \quad j = 1, 2, ..., n. \qquad \text{(P. 1. 1.'. d.)}$$

Hier sind:

p_{j} : „Preis" des Sektors $j = 1, 2, ..., n,$

v_{j} : das bedingte Nettoprodukt des Sektors $j = 1, 2, ..., n$.

Mit

$$(p_{j}) =: p \in R_{+}^{n}$$

$$(v_{j}) =: v \in R_{+}^{n}$$

lässt sich (P. 1. 1.'. d.) in Matrizenschreibweise in folgender Form darstellen:

$$p = A^{T} p + v. \qquad \text{(P.1. 1. d.)}$$

B. 1. 7.
Für das Problem (P. 7. 1. d.) (bzw. (P. 1. 1'. d.)) lassen sich ähnlich wie in S. 1. 2. und S. 1. 5. Äquivalenzaussagen beweisen. Es lässt sich ferner zeigen, dass die Lösbarkeit (Funktionsfähigkeit: „*workability*") des Modells (P. 1. 1.) (bzw. (P. 2. 1'.)) äquivalent der Lösbarkeit (Produktivität: „*profitability*") des Modells (P. 1. 1. d.) (bzw. (P. 1. 1'. d.)) ist.

B. 1. 8.
Das Problem (P. 1. 1'.) ist ein Spezialfall des Gleichungssystems

$$\rho x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad \text{(P. 1. 2'.)}$$

wobei $\rho \in R^1$ ein Parameter ist.
Das dazu duale Problem lautet:

$$\rho p_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i + v_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad \text{P. 1. 2'. d.)}$$

Die in S. 1. 2. und S. 1. 5. enthaltenen Äquivalenzaussagen lassen ich entsprechend verallgemeinern. Dies gilt auch für die Bauer-Solow- Bedingung [Vgl. Nikaido, Hukukane: Convex Structures and Economic Theory. New York-London 1968, S. 87-108].

(Letzte Aktualisierung: 20.01.09)