Nichtlineare Input-Output-Modelle

B. 1.

Nichtlineare Input-Output-Modelle haben einige Vorteile gegenüber den linearen:

Vorteile des nichtlinearen Leontief-Modells:

- **Abbildung komplexer Prozesse**: Nichtlineare Modelle können komplexere und realistischere Strukturen wirtschaftlicher Beziehungen darstellen, beispielsweise bei nicht-proportionalen Skaleneffekten oder Sättigungseffekten, die in der Wirtschaft häufig vorkommen.
- **Höhere Genauigkeit**: Durch die Berücksichtigung von Nichtlinearitäten können nichtlineare Modelle ein tieferes Verständnis und genauere Vorhersagen liefern, insbesondere wenn die Annahme linearer Zusammenhänge zu unzutreffenden Ergebnissen führt.
- **Berücksichtigung von Grenzwerten**: Im Gegensatz zu linearen Modellen, die oft unbegrenzte Skalierbarkeit annehmen, können nichtlineare Modelle reale Grenzen und Sättigungspunkte berücksichtigen, wie z. B. die Kapazitätsgrenzen einer Industrie oder die Grenzen des menschlichen Konsums.
- **Bessere Darstellung realer Phänomene**: Viele Wirtschaftsmodelle müssen nichtlineare Elemente wie Wechselwirkungen zwischen Märkten, individuelle Entscheidungen oder Auswirkungen von externen Schocks einbeziehen. Nichtlineare Modelle sind hierfür besser geeignet.

Nachteile (und Gründe für die Notwendigkeit):

- **Erhöhte Komplexität**: Nichtlineare Modelle sind in der Regel komplexer zu formulieren, zu lösen und zu interpretieren als lineare Modelle.
- **Rechenintensität**: Die Lösungen für nichtlineare Probleme erfordern oft rechenintensivere numerische Verfahren als die analytischen oder Standard-numerischen Techniken, die für lineare Probleme verwendet werden können.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Vorteile des nichtlinearen Leontief-Modells in seiner Fähigkeit liegen, die Komplexität und die nicht-linearen Mechanismen der realen Welt genauer zu erfassen, was zu fundierteren wirtschaftlichen Analysen und Prognosen führt.

BS. 1

Gegeben sei

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1^\gamma + a_{12}x_2^\gamma + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1^\gamma + a_{22}x_2^\gamma + y_2 \end{cases}, \qquad 0 < \gamma < 1$$

mit

$$A^0 = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.20 \\ 0.15 & 0.25 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Die Nichtlinearität wird durch $a_{ij}(x) = a_{ij}^0 \left(1 + \gamma x_j\right)$ eingeführt. Wir wählen $\gamma = 0.001$

Wir rechnen mit der Iterationsvorschrift:

$$x^{(k+1)} = A(x^{(k)})x^{(k)} + y$$

Wir wählen den Startwert $x^{(0)} = y$.

Das Abbruchskriterium soll die maximale Komponentendifferenz

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_\infty < 10^{-3}$$

sein.

Iterationstabelle

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	50.000000	30.000000
1	71.930000	45.600000
2	82.667049	53.485429
3	88.119491	57.511664
4	90.929212	59.587494
5	92.386833	60.664141
6	93.145504	61.224394
7	93.541041	61.516443
8	93.747433	61.668824
9	93.855178	61.748369
10	93.911438	61.789903
11	93.940818	61.811593
12	93.956162	61.822921
13	93.964176	61.828837
14	93.968361	61.831927
15	93.970547	61.833541
16	93.971689	61.834383
17	93.972285	61.834824

Nach 17 Iterationen (Abbruchbedingung erfüllt) erhalten wir die Näherung

$$x^* \approx \begin{pmatrix} 93.972285 \\ 61.834824 \end{pmatrix}.$$

BS. 2

Gegeben sei

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1^\gamma + a_{12}x_2^\gamma + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1^\gamma + a_{22}x_2^\gamma + y_2 \end{cases}, \qquad 0 < \gamma < 1$$

mit

$$A^0 = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.10 \\ 0.20 & 0.25 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Die Nichtlinearität wird durch $a_{ij}(x) = a_{ij}^0 \left(1 + 0.1 \dfrac{x_j}{1 + x_j} \right)$ eingeführt.

Wir wählen $\gamma = 0.001$

Wir rechnen mit der Iterationsvorschrift:

$$x^{(k+1)} = A\left(x^{(k)}\right)x^{(k)} + y\,.$$

Wir wählen den Startwert $x^{(0)} = y$.

Das Abbruchkriterium soll die maximale Komponentendifferenz

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_{\infty} < 10^{-8}$$

Iterationstabelle

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	50.000000	40.000000
1	70.860832	61.956002
2	80.159811	72.582959
3	84.397369	77.551058
4	86.342227	79.849515
5	87.236849	80.909445
6	87.648661	81.397736
7	87.838269	81.622612
8	87.925575	81.726165
9	87.965776	81.773849
10	87.984288	81.795806
11	87.992811	81.805917
12	87.996736	81.810572
13	87.998544	81.812716
14	87.999376	81.813703
15	87.999759	81.814158
16	87.999936	81.814367
17	88.000017	81.81463
18	88.000054	81.814508
19	88.000072	81.814528
20	88.000080	81.814538
…		
28	88.000086	81.814546

Nach 28 Iterationen (Abbruchbedingung erfüllt) erhalten wir die Näherung

$$x^* \approx \begin{pmatrix} 88.000086 \\ 81.814546 \end{pmatrix}.$$

Literatur:

/1/ Chandler, P.

Nonlinear Input-Output Model

Journal of Economic Theory, Vol. 3, No. 2, pp. 219 – 229

/2/ Iritani, Jun

On a Non-Linear Leontief System

The Economic Studies, Quarterly Volume 41, No. 2, June 1990

/3/ Kaper, B.

Nonlinear input-output models and comparative statics.

Link to publication in Tilburg University Research Portal, 1979

/4/ Lahiri, S.

Input-Output Analysis with Scale Dependent Coefficients,

Econometrica, 44 (5): 947 - 961

/5/ Michaelides, Panayotis G.; Belegri-Roboli, Athena; Markaki, Maria

A Non-Linear Leontief-Type Input-Output Model

20th International Input-Output Association Conference in Bratislava,

Slovakia, June 2012

/6/ West, Guy, R.; Jackson, Randall

Non-Linear Input-Output Models: Practicability and Potential

West Virginia University, randall.jackson@mail.wvu.edu