Nichtlineare Input-Output-Analyse

B. 1.

Die Linearitätsvoraussetzung ist ein Kernbestandteil des Leontief-Input-Output-Modells, bringt jedoch erhebliche Nachteile und Einschränkungen mit sich, da sie die Realität wirtschaftlicher Produktionsprozesse stark vereinfacht. Die wesentlichen Nachteile sind:

- **Proportionale Input-Output-Beziehung (Keine Skaleneffekte):** Die Linearität impliziert, dass für eine Verdoppelung des Outputs genau die doppelte Menge an Inputs (Rohstoffe, Energie, Arbeit) benötigt wird. Reale Produktionsprozesse weisen jedoch oft Skaleneffekte (Economies of Scale) auf, bei denen Input-Verhältnisse nicht linear mit dem Produktionsvolumen steigen.
- **Fixe Produktionskoeffizienten (Keine Input-Substitution):** Es wird angenommen, dass Inputs in festen Proportionen verwendet werden müssen und nicht gegeneinander ausgetauscht werden können (limitationale Produktionsfunktion). In der Realität können Unternehmen bei steigenden Preisen jedoch Faktoren substituieren (z. B. Arbeit durch Maschinen ersetzen).
- **Konstante Technologie (Statische Analyse):** Die linearen Koeffizienten basieren auf Daten einer bestimmten Periode und ändern sich im Modell nicht. Technologischer Fortschritt oder Änderungen in der Produktionseffizienz werden nicht berücksichtigt.
- **Vernachlässigung von Engpässen:** Aufgrund der linearen Annahme wird davon ausgegangen, dass Inputs unbegrenzt verfügbar sind. Das Modell kann keine Produktionsengpässe oder Kapazitätsgrenzen abbilden, die eintreten, wenn die Nachfrage stark steigt.
- **Unrealistische Preisbildung:** Da die Koeffizienten fix und linear sind, werden Preisanpassungen nicht adäquat abgebildet. Das Modell unterstellt oft, dass Produzenten Preiserhöhungen bei Inputs direkt proportional an den Output-Preis weitergeben können, was in Wettbewerbsmärkten selten der Fall ist.

Zusammenfassend führt die Linearität zu einer starren Struktur, die zwar rechentechnisch vorteilhaft ist, aber oft zu ungenauen Vorhersagen führt, da sie nichtlineare Phänomene wie Kapazitätsgrenzen, Skaleneffekte und technische Substitutionen ignoriert.

D. 1.

Ein nichtlineares Leontief-Modell sei folgendermaßen definiert:

$$x = A(x)x + y$$

Hier sind:

$x = (x_j), \quad j = 1,2,...,n$: Produktionsvektor

$A(x_{ij}), \quad i, j = 1,2,...,n$: Matrix der Koeffizienten, abhängig von anderen Faktoren

$y = (y_i), \quad i = 1,2,...,n$: Vektor der Endnachfrage

B. 2. (*Die verallgemeinerte nichtlineare Leontief-Gleichung*)

Im nichtlinearen Fall wird also die konstante Matrix A durch eine Funktion $f_{ij}(x_j)$ ersetzt.

B. 3. (*Spezielle Funktionen für* $f_{ij}(x_j)$)

Um die Nichtlinearität konkret zu berechnen, nutzt man oft folgende Ansätze:

1. **Cobb-Douglas Produktionsfunktion**
   Dies ist der Klassiker, um die Substituierbarkeit zwischen Inputs darzustellen. Der Output x_j hängt von den Inputs z_{ij} ab:

   $$x_j = A_j \prod_{i=1}^{n} z_{ij}^{\alpha_{ij}} .$$

   Dabei gilt meist $\sum \alpha_{ij} \le 1$. Wenn man dies nach den Inputs z_{ij} umstellt, erhält man eine nichtlineare Abhängigkeit vom Produktionsziel.

   Für zwei Inputs x_1 und x_2:

   $$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$$

   Hier sind:
   - Y: Output
   - A: Technologie
   - K: Kapital
   - L: Arbeit
   - $\alpha, \beta\ (> 0)$: Produktionselastizitäten

2. **CES-Funktionen (Constant Elasticity of Substitution)**

Wenn die Austauschbarkeit der Vorleistungen nicht perfekt ist, nutzt man:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$$

Für zwei Inputs x_1 und x_2:

$y = A\left(\alpha x_1^{\rho} + (1-\alpha)x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$, α : Verteilungsparameter (Gewichtung der Inputs)

Hier sind:

A: Effizienzparameter (beschreibt den technologischen) Stand)
δ_i : Gewichtund der einzelnen Inputs

ρ : Substitutionsparameter: Er bestimmt die Elastizität der Substitution ρ durch die Formel $\rho = \frac{\sigma - 1}{\sigma}$.

3. **Translog-Produktionsfunktion**

$$\ln y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \ln x_i \ln x_j$$

- Dabei gilt die Symmetrie-Bedingung $\beta_{ij} = \beta_{ji}$
- Wenn all $\beta_{ij} = 0$ sind, reduziert sich die Funktion zur klassischen Cobb-Douglas-Funktion

B. 4. (*Lösung eines nichtlinearen Problems*)

Während man lineare Systeme einfach mit der Invertierung der Matrix $(E - A)$ lösen kann, erfordern nichtlineare Modelle meist iterative Verfahren.

Man sucht den Fixpunkt der Abbildung

$$x = F(x) + y .$$

Gängige Lösungsmethoden:

- **Newton-Raphson-Verfahren:** Das am häufigsten verwendete Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme. Es nutzt lokale Linearisierungen (mithilfe der Jacobi-Matrix), um sich schrittweise der Lösung anzunähern.

- **Gauß-Seidel-Verfahren:** Ein iteratives "First-Order"-Verfahren, das besonders bei großen Systemen effizient sein kann, da es keine Ableitungen benötigt.
- **Fixpunkt-Iteration:** Hierbei wird das Modell in die Form $x = f(x)$ gebracht und der Vektor x solange aktualisiert, bis Konvergenz erreicht ist.
- **RAS-Verfahren:** Ein spezielles Verfahren zur Schätzung und Anpassung von Input-Output-Matrizen an neue Randsummen, das auch bei nichtlinearen Rahmenbedingungen Anwendung findet.

<u>**BS. 1**</u>

Gegeben sei

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1^\gamma + a_{12}x_2^\gamma + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1^\gamma + a_{22}x_2^\gamma + y_2 \end{cases}, \qquad 0 < \gamma < 1$$

mit

$$A^0 = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.20 \\ 0.15 & 0.25 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Die Nichtlinearität wird durch $a_{ij}(x) = a_{ij}^0\left(1 + \gamma x_j\right)$ eingeführt. Sei $\gamma := 0.001$

Wir rechnen mit der Iterationsvorschrift:

$$x^{(k+1)} = A(x^{(k)})x^{(k)} + y$$

Wir wählen den Startwert $x^{(0)} = y$.

Das Abbruchskriterium soll die maximale Komponentendifferenz

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_\infty < 10^{-3}$$

sein.

Iterationstabelle

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	50.000000	30.000000
1	71.930000	45.600000
2	82.667049	53.485429
3	88.119491	57.511664
4	90.929212	59.587494
5	92.386833	60.664141
6	93.145504	61.224394
7	93.541041	61.516443
8	93.747433	61.668824
9	93.855178	61.748369
10	93.911438	61.789903
11	93.940818	61.811593
12	93.956162	61.822921
13	93.964176	61.828837
14	93.968361	61.831927
15	93.970547	61.833541
16	93.971689	61.834383
17	93.972285	61.834824

Nach 17 Iterationen (Abbruchbedingung erfüllt) erhalten wir die Näherung

$$x^* \approx \begin{pmatrix} 93.972285 \\ 61.834824 \end{pmatrix}.$$

BS. 2

Gegeben sei

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1^\gamma + a_{12}x_2^\gamma + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1^\gamma + a_{22}x_2^\gamma + y_2 \end{cases}, \qquad 0 < \gamma < 1$$

mit

$$A^0 = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.10 \\ 0.20 & 0.25 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Die Nichtlinearität wird durch $a_{ij}(x) = a_{ij}^0\left(1 + 0.1\frac{x_j}{1+x_j}\right)$ eingeführt.

Sei $\gamma = 0.001$.

Wir rechnen mit der Iterationsvorschrift:

$$x^{(k+1)} = A\left(x^{(k)}\right)x^{(k)} + y.$$

Wir wählen den Startwert $x^{(0)} = y$.

Das Abbruchskriterium soll die maximale Komponentendifferenz

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty < 10^{-8}$$

Wir rechnen mit der Iterationsvorschrift:

$$x^{(k+1)} = A\left(x^{(k)}\right)x^{(k)} + y.$$

Wir wählen den Startwert $x^{(0)} = y$.

Das Abbruchskriterium soll die maximale Komponentendifferenz

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty < 10^{-8}$$

Iterationstabelle

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	50.000000	40.000000
1	70.860832	61.956002
2	80.159811	72.582959
3	84.397369	77.551058
4	86.342227	79.849515
5	87.236849	80.909445
6	87.648661	81.397736
7	87.838269	81.622612
8	87.925575	81.726165
9	87.965776	81.773849
10	87.984288	81.795806
11	87.992811	81.805917
12	87.996736	81.810572
13	87.998544	81.812716
14	87.999376	81.813703
15	87.999759	81.814158
16	87.999936	81.814367
17	88.000017	81.81463
18	88.000054	81.814508
19	88.000072	81.814528
20	88.000080	81.814538
…		
28	88.000086	81.814546

Nach 28 Iterationen (Abbruchbedingung erfüllt) erhalten wir die Näherung

$$x^* \approx \begin{pmatrix} 88.000086 \\ 81.814546 \end{pmatrix}.$$

B. 5.

Es gibt auch weitere nichtlineare Modelle, in denen die Cobb-Douglas genommen wird. Wir beschränken uns hier exemplarisch auf das Modell von Koller-Luptacik- Nezinski:

Sei

$$x_j = \varepsilon_j L_j^{\alpha_j} K_j^{\beta_j} P_j^{\gamma_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

mit

x_j : Bruttoproduktion

L_j : Arbeit

K_j :Kapital

P_j :Automation

im Sektor j.

Die Bilanzgleichungen:

$$(E - A)x \geq y$$

oder

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\delta_{ij} - a_{ij}\right) x_j \geq y_i, \quad i = 1, 2, \ldots n \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ & \text{für } i = j \end{cases}$$

y_i : Endnachfrage des Sektors $i = 1, 2, \ldots, n$.

Substituiert man (1) für x_j, so bekommt man:

$$\sum_{j \neq i} d_{ij} L_j^{\alpha_j} K_j^{\beta_j} P_j^{\gamma_j} L_i^{-\alpha_i} K_i^{-\beta_i} P_i^{-\gamma_i} + c_i L_i^{-\alpha_i} K_i^{-\beta_i} P_i^{-\lambda_i} \leq 1 \tag{2}$$

Mit

$$d_{ij} = \frac{a_{ij} \varepsilon_j}{(1 - a_{ii})} \quad \text{und} \quad c_i = \frac{y_i}{(1 - a_{ii}) \varepsilon_i}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Weiter sei

$$K_j \le \bar{K}_j \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\bar{K}_j} K_j = 1, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{3}$$

$$P_j \le \bar{P}_j \ \text{bzw.} \quad \frac{1}{\bar{P}_j} P_j = 1, \ \ j = 1, 2, ..., n \ . \tag{4}$$

Dann wird folgendes Optimierungsproblem formuliert:

$$\min \ L = \sum_{j=i}^{n} L_j \tag{5}$$

unter den Bedingungen (2), (3), (4) und

$$L_j > 0, \ K_j > 0, \ P_j > 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

B. 6.

Es handelt ich hier um ein Problem der geometrischen Optimierung.[1]

[1] Siehe /4/.

Literatur:

/1/ Chandler, P.

Nonlinear Input-Output Model

Journal of Economic Theory, Vol. 3, No. 2, pp. 219 – 229

/2/ Guerra, Ano-Isabel; Sanch, Ferran

An operational, nonlinear input-output system

/3/ Iritani, Jun

On a Non-Linear Leontief System

The Economic Studies, Quarterly Volume 41, No. 2, June 1990

/3/ Kaper, B.

Nonlinear input-output models and comparative statics.

Link to publication in Tilburg University Research Portal, 1979

/4/ Koller, Wolfgang; Luptacik, Mikulas; Nezinski, Eduard

Impacat of Automation on Employment and Productivity: A Nonlinear Input-Output-Model

16th Input-Output Workshop 2025, March 25th – 26th, Groningen

/5/ Lahiri, S.

Input-Output Analysis with Scale Dependent Coefficients,

Econometrica, 44 (5): 947 - 961

/6/ Michaelides, Panayotis G.; Belegri-Roboli, Athena; Markaki, Maria

A Non-Linear Leontief-Type Input-Output Model

20th International Input-Output Association Conference in Bratislava, Slovakia, June 2012

/7/ West, Guy, R.; Jackson, Randall

Non-Linear Input-Output Models: Practicability and Potential

West Virginia University, randall.jackson@mail.wvu.edu