Lineare Optimierung

Modellierung und graphische Lösung

Beispiel 1:

Ein Betrieb stellt zwei Produkte P_1 und P_2 her . Dabei verwendet er die Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 . Folgende Tabelle gibt Informationen über die maximal verfügbaren Rohstoffmengen, den Rohstoffverbrauch pro Produktionseinheit und die Die Gewinne per Produkteinheit an:

	P_1	P_2	Rohstoffmengen
R_1	3	1	33
R_2	1	1	13
R_3	5	8	80
Gewinn/ME	21	24	

Gesucht ist ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm.

1. Stellen Sie das Problem als ein Modell der linearen Optimierung dar.
2. Lösen Sie das Problem graphische.

Lösung:

1.

Sei $x_i \,, i = 1,2$ :: Produktionsmenge P_i

Zielfunktion:

$$Z = 21x_1 + 24x_2 \rightarrow Max$$

Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 33 \\ x_1 + x_2 &\leq 13 \\ 5x_1 + 8x_2 &\leq 80 \end{aligned}$$

Nichtnegativitätsbedingung:

$$x_1, \; x_2 \geq 0$$

2.

Wir stellen zunächst die Nebenbedingungen graphisch dar und nehmen die erste Bedingung als Gleichung:

$$3x_1 + x_2 = 33$$

Eine Gleichung stellt geometrische eine Gerade dar. Zur Bestimmung der Gerade ermitteln wir die Schnittpunkte der Gerade mit den Achsen, indem wir $x_1 = 0$ setzen und x_2 berechnen und dann $x_2 = 0$ setzen und x_1 berechnen:

$$x_1 := 0 \quad \Rightarrow \; x_2 = 33$$

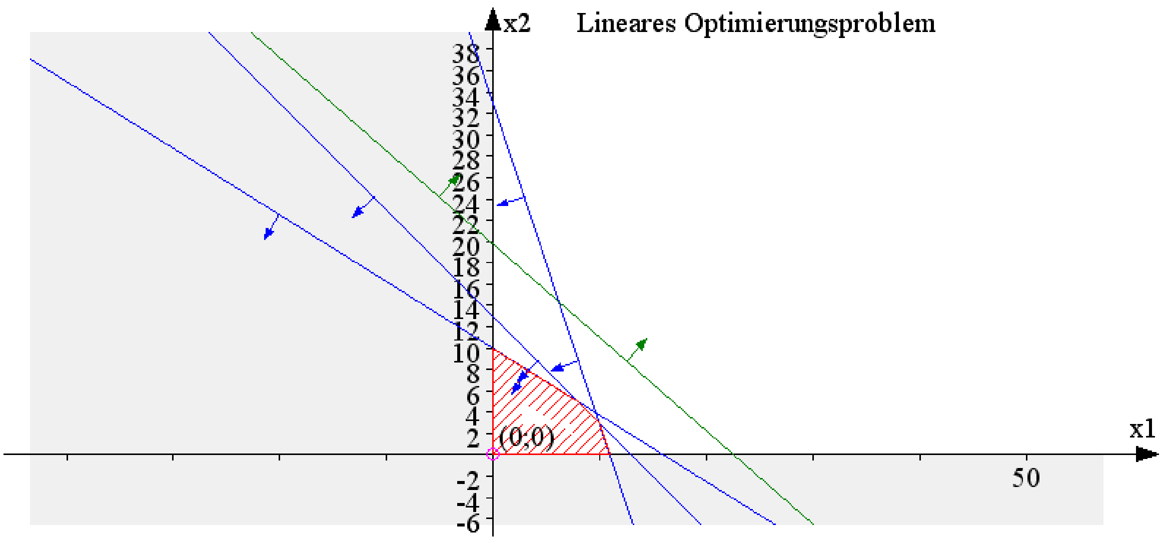
$$x_2 := 0 \quad \Rightarrow \; x_1 = 11\,.$$

Als Gleichung genommen erfüllen alle Punkte unterhalb der Geraden die Gleichung. Die Nebenbedingung ist aber eine Ungleichung des Typs ≤. Dies machen wir durch einen Pfeil, der nach unten Zeigt deutlich. Damit erfüllen nicht nur die Punkte, die auf der Geraden liegen, sondern auch diejenigen, die darunter liegen die erste Nebenbedingung.

So verfahren wir auch mit den anderen Nebenbedingungen.

Die gemeinsame Punktmenge heißt **Menge der zulässigen Lösungen**. Sie stellt alle möglichen Produktionsprogramme dar. Schraffieren Sie diese Menge.

Siehe Kapitel 3/Lösungen/3a.



Die Menge der zulässigen Lösungen hat folgender **Eckpunkte**:

$$P_0(0,0),\ P_1(0,10),\ P_3(8,5),\ P_4(10,3)\ ,\ P_5(11,0)$$

Nach der Theorie der linearen Optimierung

1. Ein Optimum eines linearen Optimierungsproblems wird immer in einem **Randpunkt** angenommen, falls es eine zulässige Lösung gibt.
2. Gibt es **nur** ein Optimum, so wird es in einem **Eckpunkt** angenommen.

Daher rechnen wir den Zielfunktionswert für die einzelnen Eckpunkte:

$P_0(0,0)$, $\quad z_0 = 0$

$P_1(0,9)$, $\quad z_1 = 162$

$P_2(8,5)$, $\quad z_3 = 288$

$P_3(10,3)$, $\quad z_4 = 282$

$P_5(11,0)$, $\quad z_5 = 231$

Damit hat das Problem ein eindeutiges Maximum:

$$x^* = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad z^* = 288\,.$$

Also der Betrieb erzielt einen maximalen Gewinn von 288 GE, wenn er vom P_1 8 Mengeneinheiten von P_2 5 Mengeneinheiten produziert.

<u>Beispiel 2:</u>

Das Beispiel 1 sei gegeben mit folgenden neuen Daten:

	P_1	P_2	Rohstoffmengen
R_1	2	3	33
R_2	1	1	15
R_3	1	3	27
Gewinn/ME	12	18	

Gesucht ist ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm.

1. Stellen Sie das Problem als ein Modell der linearen Optimierung dar.
2. Lösen Sie das Problem graphische.

Lösung:

1.

Sei $x_i \; ,i = 1,2$: : Produktionsmenge P_i

Zielfunktion:

$$z = 12x_1 + 18x_2 -> \max$$

Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 33 \\ x_1 \; + x_2 &\leq 15 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 27 \end{aligned}$$

Nichtnegativitätsbedingung:

$$x_1, \; x_2 \geq 0$$

Wir stellen jede Nebenbedingung als Gleichung dar und bestimmen die entsprechenden Schnittpunkte mit den Achsen:

$$2x_1 + 3x_2 = 33$$

$$x_1 := 0 \quad \Rightarrow x_2 = 11$$

$$x_2 := 0 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{33}{2}$$

$$x_1 \; + x_2 = 15$$

$$x_1 := 0 \quad \Rightarrow x_2 = 15$$

$$x_2 := 0 \quad \Rightarrow x_1 = 15$$

$$x_1 + 3x_2 = 27$$

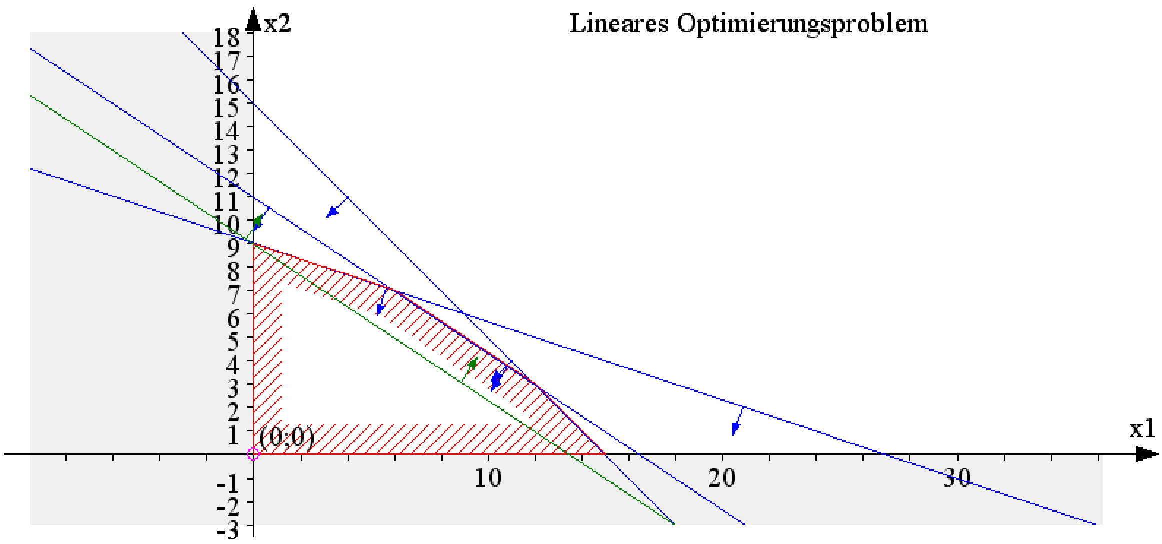
$$x_1 := 0 \quad \Rightarrow x_2 = 9$$

$$x_2 := 0 \quad \Rightarrow x_1 = 27$$

Als Gleichung genommen erfüllen alle Punkte unterhalb der Geraden die Gleichung. Die Nebenbedingungen sind aber Ungleichungen des Typs ≤. Dies machen wir durch einen Pfeil, der nach unten Zeigt deutlich. Damit erfüllen nicht nur die Punkte, die auf den Geraden liegen, sondern auch diejenigen, die darunter liegen die drei Nebenbedingung.

Die gemeinsame Punktmenge heißt **Menge der zulässigen Lösungen**. Sie stellt alle möglichen Produktionsprogramme dar. Schraffieren Sie diese Menge.

Siehe Kapitel 3/Lösungen/3c.



Die Menge der zulässigen Lösungen hat folgender **Eckpunkte** (Sie werden bestimmt durch die Lösung eines entsprechenden linearen Gleichungssystems):

$$P_0(0,0),\ P_1(0,11),\ P_3(6,7),\ P_4(12,3)\ ,\ P_5(15,0)$$

Wir rechnen nun die Zielfunktionswerte für die Eckpunkte:

$P_0(0,0)$, $z_0 = 0$

$P_1(0,11)$, $z_1 = 198$

$P_2(6,7)$, $z_3 = 198$

$P_5(12,3)$, $z_4 = 198$

$P_5(15,0)$, $z_5 = 180$

Damit haben wir zwei optimale Eckpunkte (Basislösungen):

$$x_1^* = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2^* = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mit dem maximalen Gewinn von 198 GE.

Nun haben wir aber folgenden Satz der linearen Optimierung:

Hat ein lineares Optimierungsproblem zwei optimale Eckpunkte (Basislösungen), so hat es unendlich viele Optimallösungen. Diese liegen auf der Verbindungsstrecke zwischen den beiden optimalen Eckpunkten und können durch folgende Vorschrift ermittelt werden:

$$x^* = \alpha x^{*1} + (1-\alpha) x^{*2}, \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

Sucht man z.B. eine dritte Optimallösung, so setzt man einen Wert für α zwischen 0 und 1 in die obere Formel ein und berechnet sie.

Damit hat unser Problem eine **mehrdeutige Optimallösung**.

Bemerkung:

Wir haben bisher auf die graphische Darstellung der Zielfunktion verzichtet. Die kann man auch folgendermaßen tun:

Die Zielfunktion stellt eigentlich unendlich viele Geraden, die allerdings alle parallel zueinander verlaufen. Es genügt damit nur eine zu finden. Dazu kann man die Koeffizienten von x_1 und x_2 vertauscht auf den Achsen wählen, also 12 auf der x_2 – Achse und 18 auf der x_1 -Achse. Verschieben Sie diese Gerade nach oben. Sie verlassen die Menge der zulässigen Lösungen genau auf dem Verbindungssegment zwischen den beiden Eckpunkten P_2 und P_3.

<u>Beispiel 3:</u>

Wir gehen gleich vom folgenden Modell aus:

$$\begin{aligned} z = 12x_1 + 18x_2 &-> \max \\ x_1 + 3x_2 &\le 12 \\ x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ 2x_1 + 5x_2 &\ge 30 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

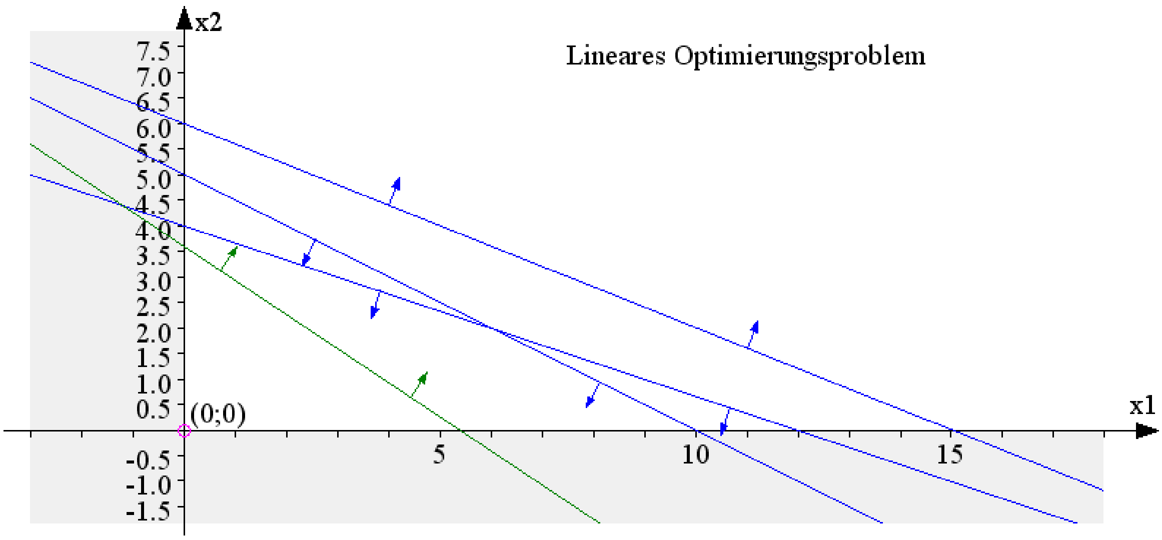
Lösung:

Wir können uns hier kurzfassen:

Stellen Sie die drei Nebenbedingungen wie bisher graphisch dar. Beachten sie bitte, dass das Pfeil nach oben zeigt, wenn die Ungleichung des Typs $\geq$ ist und nach unten, wenn des Typs $\leq$.

Dann stellen Sie fest, dass die Menge der zulässigen Lösungen eine leere Menge ist.

Damit hat das Problem keine zulässige Lösung und damit auch keine Optimallösung.



Beispiel 4:

Wir gehen gleich vom folgenden Modell aus:

$$z = 18x_1 + 6x_2 -> \max$$
$$-4x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$-x_1 + 3x_2 \le 15$$
$$x_1 - 4x_2 \le 4$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

Lösung:

Wir werden feststellen, dass dieses Modell leider keinen realen ökonomischen Hintergrund haben kann. Dafür sind nicht die negativen Koeffizienten im Nebenbedingungssystem verantwortlich. Zwar sind solche Koeffizienten in der Regel nicht negativ, aber es gibt auch solche Fälle. Z.B. wenn auf Grund chemischer Reaktionen, nicht nur material verbraucht wird, sondern auch gewisse Substanzen gewonnen werden.

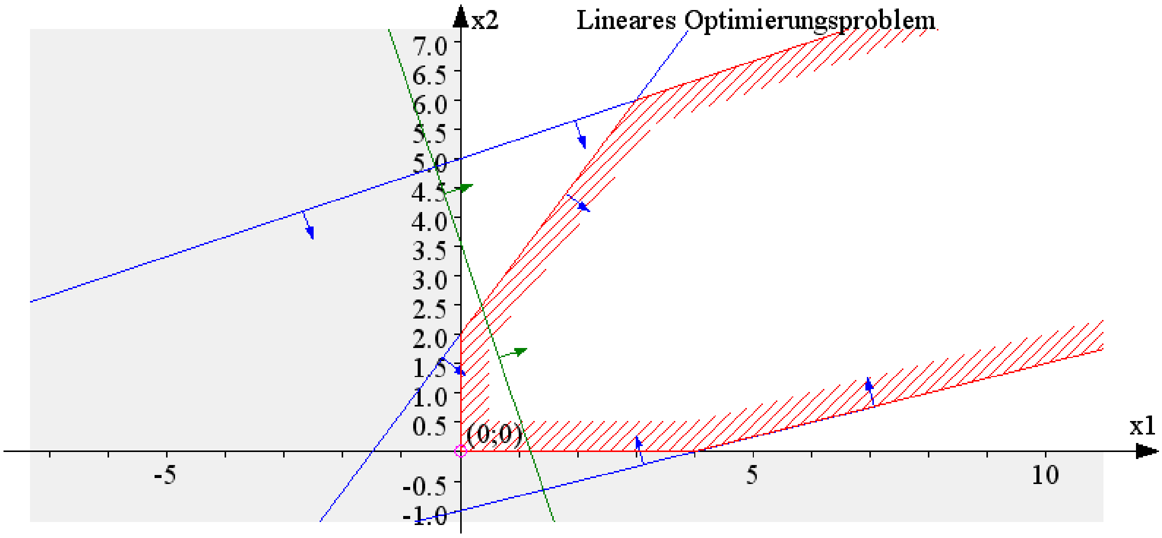
Wir werden auch hier zunächst die Menge der zulässigen Lösungen bestimmen. (Die Nebenbedingungen werden als Gleichungen beibehalten, um die Richtung des Pfeils einfacher zu setzen.)

1.
$$-4x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$x_1 := 0 \quad x_2 \le 2$$
$$x_2 := 0 \quad x_1 \ge -\frac{3}{2}$$

2.
$$-x_1 + 3x_2 \le 15$$
$$x_1 := 0 \quad x_2 \le 5$$
$$x_2 := 0 \quad x_1 \ge -15$$

3.
$$x_1 - 4x_2 \le 4$$
$$x_1 := 0 \quad x_2 \ge -1$$
$$x_2 := 0 \quad x_1 \le 4$$

Damit haben wir folgende Grafik:



Verschiebt man nun die Zielfunktionsgerade (die grüne) nach oben, so erwischt man keinen Endpunkt und beleibt in der Menge der zulässigen Lösungen.

Damit ist die Zielfunktion auf der Menge der zulässigen Lösungen nach oben nicht beschränkt und die Aufgabe hat keine optimale Lösung. Leider, weil dies bedeuten würde, dass Ressourcen, entgegen der Realität, unbeschränkt zur Verfügung stehen.

Beispiel 5 (***Das Diätproblem***)

Die nachfolgende Tabelle zeigt wie viele Mengeneinheiten Eiweiß, Fett und Kohlenhydrate in 100 g zweier Nahrungsmittel N_1 und N_2 enthalten sind, den täglichen Mindestbedarf einer Person an diesen Nährstoffen und die Preise in Euro von 100 g der Nahrungsmittel N_1 und N_2:

Nährstoffe	Nahrungsmittel N_1	Nahrungsmittel N_2	Täglicher Mindestbedarf
Eiweiß	6	1	18
Fett	1	4	12
Kohlenhydrate	2	1	10
Preis (in €/100g)	20	40	

Es ist ein kostenminimaler Diätplan aufzustellen.

Lösung:

Sei

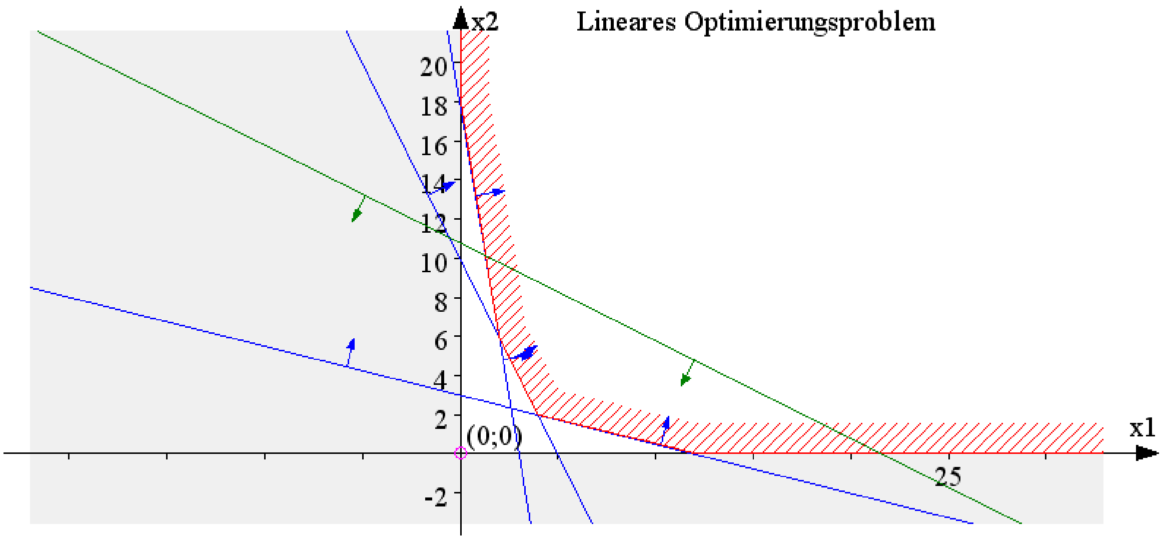
$x_i, i = 1,2:$ Nahrungsmittelmenge N_i

Das Modell:

$$z = 20x_1 + 40x_2 -> \min$$

$$\begin{aligned} 6x_1 \quad + x_2 &\geq 18 \\ x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ 2\,x_1 + \quad x_2 &\geq 10 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Wie oben beschrieben wird auch hier die Menge der zulässigen Lösungen. Wegen der Relation $\geq$ zeigt der Pfeil in allen Fällen nach oben. Der Eckpunkt mit dem kleinsten Zielfunktionswert realisiert das Minimum:



$$x^* = (4,\ 2)^T, \qquad z^* = 160$$