

# Lineare Optimierung

## Modellierung und graphische Lösung

### **Beispiel 1:**

Ein Betrieb stellt zwei Produkte  $P_1$  und  $P_2$  her. Dabei verwendet er die Rohstoffe  $R_1, R_2$  und  $R_3$ . Folgende Tabelle gibt Informationen über die maximal verfügbaren Rohstoffmengen, den Rohstoffverbrauch pro Produktionseinheit und die Gewinne per Produkteinheit an:

|           | $P_1$ | $P_2$ | Rohstoffmengen |
|-----------|-------|-------|----------------|
| $R_1$     | 3     | 1     | 33             |
| $R_2$     | 1     | 1     | 13             |
| $R_3$     | 5     | 8     | 80             |
| Gewinn/ME | 21    | 24    |                |

Gesucht ist ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm.

1. Stellen Sie das Problem als ein Modell der linearen Optimierung dar.
2. Lösen Sie das Problem graphisch.

*Lösung:*

1.

Sei  $x_i, i = 1, 2$  :: Produktionsmenge  $P_i$

**Zielfunktion:**

$$Z = 21x_1 + 24x_2 \rightarrow \text{Max}$$

**Nebenbedingungen:**

$$3x_1 + x_2 \leq 33$$

$$x_1 + x_2 \leq 13$$

$$5x_1 + 8x_2 \leq 80$$

**Nichtnegativitätsbedingung:**

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2.

Wir stellen zunächst die Nebenbedingungen graphisch dar und nehmen die erste Bedingung als Gleichung:

$$3x_1 + x_2 = 33$$

Eine Gleichung stellt geometrisch eine Gerade dar. Zur Bestimmung der Gerade ermitteln wir die Schnittpunkte der Gerade mit den Achsen, indem wir  $x_1 = 0$  setzen und  $x_2$  berechnen und dann  $x_2 = 0$  setzen und  $x_1$  berechnen:

$$x_1 := 0 \Rightarrow x_2 = 33$$

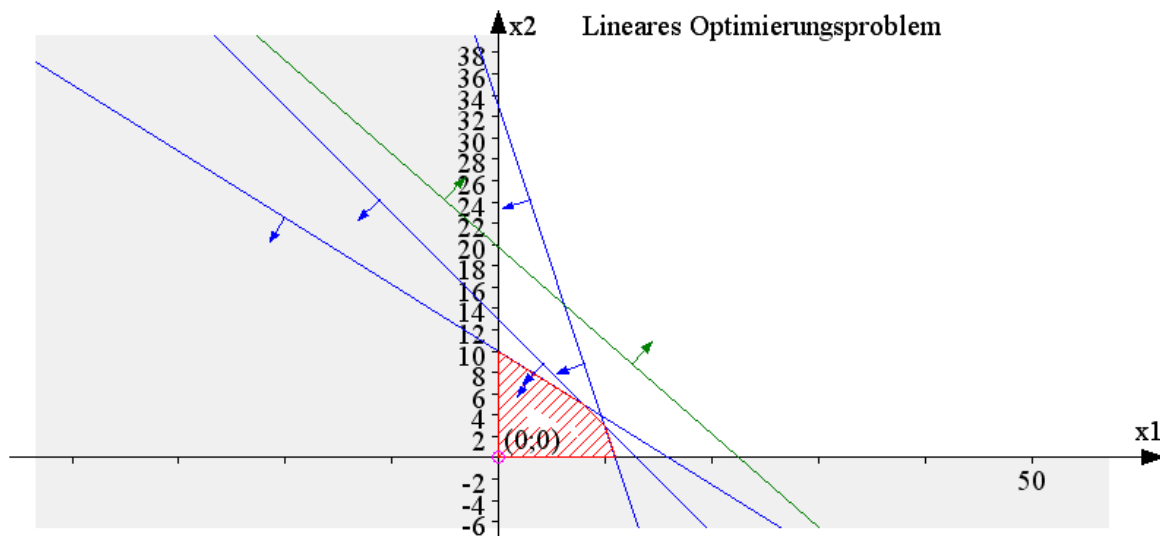
$$x_2 := 0 \Rightarrow x_1 = 11.$$

Als Gleichung genommen erfüllen alle Punkte unterhalb der Geraden die Gleichung. Die Nebenbedingung ist aber eine Ungleichung des Typs  $\leq$ . Dies machen wir durch einen Pfeil, der nach unten zeigt deutlich. Damit erfüllen nicht nur die Punkte, die auf der Geraden liegen, sondern auch diejenigen, die darunter liegen die erste Nebenbedingung.

So verfahren wir auch mit den anderen Nebenbedingungen.

Die gemeinsame Punktmenge heißt **Menge der zulässigen Lösungen**. Sie stellt alle möglichen Produktionsprogramme dar. Schraffieren Sie diese Menge.

Siehe Kapitel 3/Lösungen/3a.



Die Menge der zulässigen Lösungen hat folgender **Eckpunkte**:

$$P_0(0,0), P_1(0,10), P_2(8,5), P_3(10,3), P_4(11,0)$$

Nach der Theorie der linearen Optimierung

1. Ein Optimum eines linearen Optimierungsproblems wird immer in einem **Randpunkt** angenommen, falls es eine zulässige Lösung gibt.
2. Gibt es **nur** ein Optimum, so wird es in einem **Eckpunkt** angenommen.

Daher rechnen wir den Zielfunktionswert für die einzelnen Eckpunkte:

$$P_0(0,0), \quad z_0 = 0$$

$$P_1(0,9), \quad z_1 = 162$$

$$P_2(8,5), \quad z_2 = 288$$

$$P_3(10,3), \quad z_3 = 282$$

$$P_4(11,0), \quad z_4 = 231$$

Damit hat das Problem ein eindeutiges Maximum:

$$x^* = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad z^* = 288.$$

Also der Betrieb erzielt einen maximalen Gewinn von 288 GE, wenn er vom  $P_1$  8 Mengeneinheiten von  $P_2$  5 Mengeneinheiten produziert.

### **Beispiel 2:**

Das Beispiel 1 sei gegeben mit folgenden neuen Daten:

|           | $P_1$ | $P_2$ | Rohstoffmengen |
|-----------|-------|-------|----------------|
| $R_1$     | 2     | 3     | 33             |
| $R_2$     | 1     | 1     | 15             |
| $R_3$     | 1     | 3     | 27             |
| Gewinn/ME | 12    | 18    |                |

Gesucht ist ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm.

1. Stellen Sie das Problem als ein Modell der linearen Optimierung dar.
2. Lösen Sie das Problem graphische.

*Lösung:*

1.

Sei  $x_i, i = 1, 2$  :: Produktionsmenge  $P_i$

**Zielfunktion:**

$$z = 12x_1 + 18x_2 \rightarrow \max$$

**Nebenbedingungen:**

$$2x_1 + 3x_2 \leq 33$$

$$x_1 + x_2 \leq 15$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 27$$

**Nichtnegativitätsbedingung:**

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Wir stellen jede Nebenbedingung als Gleichung dar und bestimmen die entsprechenden Schnittpunkte mit den Achsen:

$$2x_1 + 3x_2 = 33$$

$$x_1 := 0 \Rightarrow x_2 = 11$$

$$x_2 := 0 \Rightarrow x_1 = \frac{33}{2}$$

$$x_1 + x_2 = 15$$

$$x_1 := 0 \Rightarrow x_2 = 15$$

$$x_2 := 0 \Rightarrow x_1 = 15$$

$$x_1 + 3x_2 = 27$$

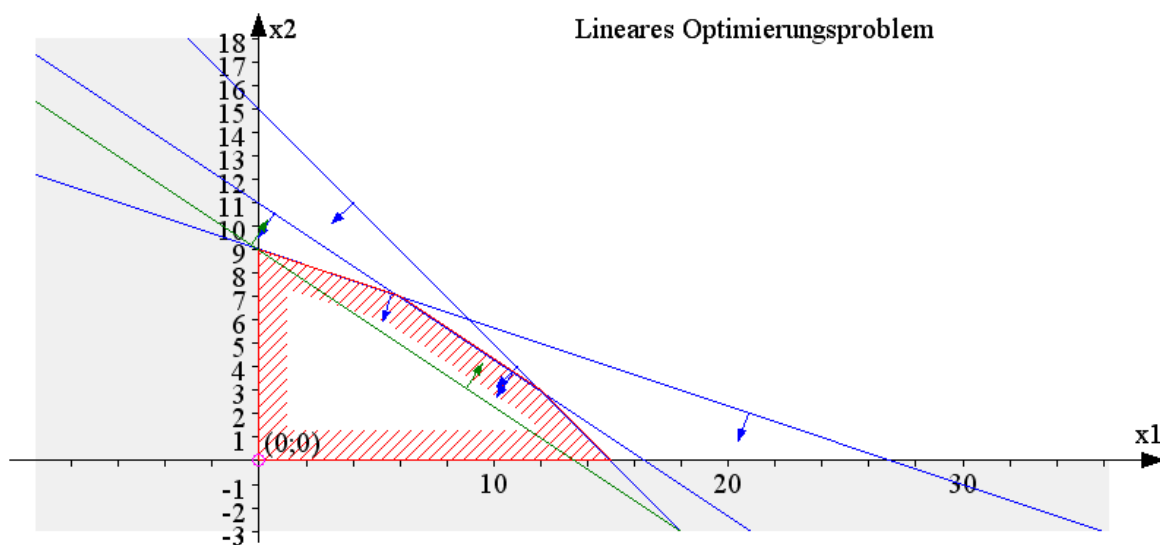
$$x_1 := 0 \Rightarrow x_2 = 9$$

$$x_2 := 0 \Rightarrow x_1 = 27$$

Als Gleichung genommen erfüllen alle Punkte unterhalb der Geraden die Gleichung. Die Nebenbedingungen sind aber Ungleichungen des Typs  $\leq$ . Dies machen wir durch einen Pfeil, der nach unten zeigt deutlich. Damit erfüllen nicht nur die Punkte, die auf den Geraden liegen, sondern auch diejenigen, die darunter liegen die drei Nebenbedingung.

Die gemeinsame Punktmenge heißt **Menge der zulässigen Lösungen**. Sie stellt alle möglichen Produktionsprogramme dar. Schraffieren Sie diese Menge.

Siehe Kapitel 3/Lösungen/3c.



Die Menge der zulässigen Lösungen hat folgender **Eckpunkte** (Sie werden bestimmt durch die Lösung eines entsprechenden linearen Gleichungssystems):

$$P_0(0,0), P_1(0,11), P_2(6,7), P_3(12,3), P_4(15,0)$$

Wir rechnen nun die Zielfunktionswerte für die Eckpunkte:

$$P_0(0,0), \quad z_0 = 0$$

$$P_1(0,11), \quad z_1 = 198$$

$$P_2(6,7), \quad z_2 = 198$$

$$P_3(12,3), \quad z_3 = 198$$

$$P_4(15,0), \quad z_4 = 180$$

Damit haben wir zwei optimale Eckpunkte (Basislösungen):

$$x_1^* = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } x_2^* = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mit dem maximalen Gewinn von 198 GE.

Nun haben wir aber folgenden Satz der linearen Optimierung:

Hat ein lineares Optimierungsproblem zwei optimale Eckpunkte (Basislösungen), so hat es unendlich viele Optimallösungen. Diese liegen auf der Verbindungsstrecke zwischen den beiden optimalen Eckpunkten und können durch folgende Vorschrift ermittelt werden:

$$x^* = \alpha x^{*1} + (1 - \alpha)x^{*2}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Sucht man z.B. eine dritte Optimallösung, so setzt man einen Wert für  $\alpha$  zwischen 0 und 1 in die obere Formel ein und berechnet sie.

Damit hat unser Problem eine **mehrdeutige Optimallösung**.

### **Bemerkung:**

Wir haben bisher auf die graphische Darstellung der Zielfunktion verzichtet. Die kann man auch folgendermaßen tun:

Die Zielfunktion stellt eigentlich unendlich viele Geraden, die allerdings alle parallel zueinander verlaufen. Es genügt damit nur eine zu finden. Dazu kann man die Koeffizienten von  $x_1$  und  $x_2$  vertauscht auf den Achsen wählen, also 12 auf der  $x_2$ -Achse und 18 auf der  $x_1$ -Achse. Verschieben Sie diese Gerade nach oben. Sie verlassen die Menge der zulässigen Lösungen genau auf dem Verbindungssegment zwischen den beiden Eckpunkten  $P_2$  und  $P_3$ .

### **Beispiel 3:**

Wir gehen gleich vom folgenden Modell aus:

$$\begin{aligned} z &= 12x_1 + 18x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 + 5x_2 &\geq 30 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

*Lösung:*

Wir können uns hier kurzfassen:

Stellen Sie die drei Nebenbedingungen wie bisher graphisch dar. Beachten sie bitte, dass das Pfeil nach oben zeigt, wenn die Ungleichung des Typs  $\geq$  ist und nach unten, wenn des Typs  $\leq$ .

Dann stellen Sie fest, dass die Menge der zulässigen Lösungen eine leere Menge ist.

**Damit hat das Problem keine zulässige Lösung und damit auch keine Optimallösung.**

