Lineare Optimierung

Modellierung und graphische Lösung

(1)

Beispiel 1:

Ein Betrieb stellt zwei Produkte P_1 und P_2 her . Dabei verwendet er die Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 . Folgende Tabelle gibt Informationen über die maximal verfügbaren Rohstoffmengen, den Rohstoffverbrauch pro Produktionseinheit und die Die Gewinne per Produkteinheit an:

	P_1	P_2	Rohstoffmengen
R_1	3	1	33
R_2	1	1	13
R_3	5	8	80
Gewinn/ME	21	24	

Gesucht ist ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm.

1. Stellen Sie das Problem als ein Modell der linearen Optimierung dar.
2. Lösen Sie das Problem graphische.

Lösung:

1.

Sei $x_i\ , i = 1,2$ :: Produktionsmenge P_i

Zielfunktion:

$$Z = 21x_1 + 24x_2 \rightarrow Max$$

Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 33 \\ x_1 + x_2 &\leq 13 \\ 5x_1 + 8x_2 &\leq 80 \end{aligned}$$

Nichtnegativitätsbedingung:

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

2.

Wir stellen zunächst die Nebenbedingungen graphisch dar und nehmen die erste Bedingung als Gleichung:

$$3x_1 + x_2 = 33$$

Eine Gleichung stellt geometrische eine Gerade dar. Zur Bestimmung der Gerade ermitteln wir die Schnittpunkte der Gerade mit den Achsen, indem wir $x_1 = 0$ setzen und x_2 berechnen und dann $x_2 = 0$ setzen und x_1 berechnen:

$$x_1 := 0 \quad \Rightarrow x_2 = 33$$

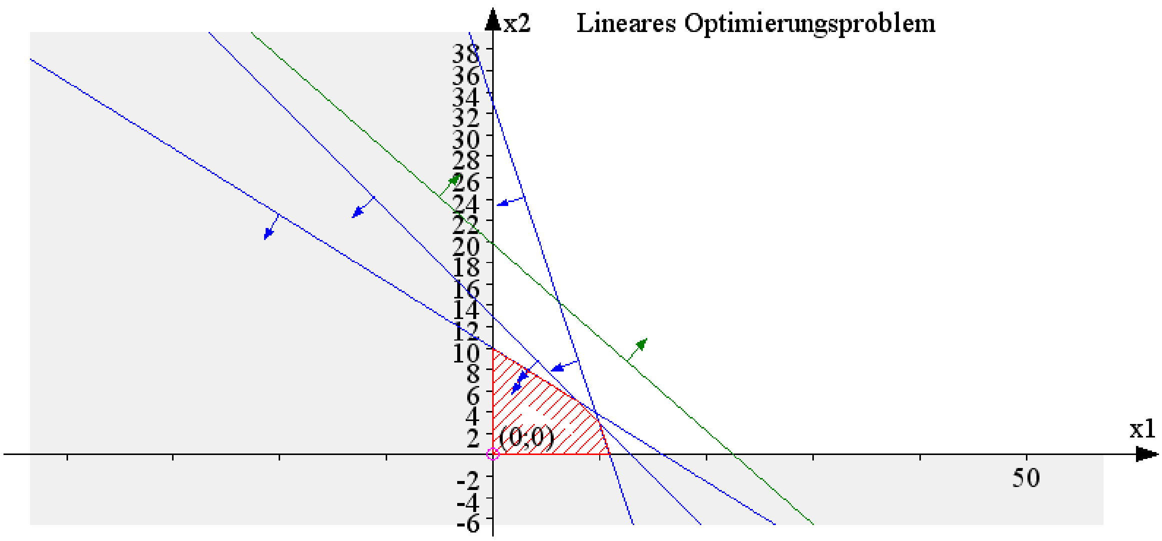
$$x_2 := 0 \quad \Rightarrow x_1 = 11\,.$$

Als Gleichung genommen erfüllen alle Punkte unterhalb der Geraden die Gleichung. Die Nebenbedingung ist aber eine Ungleichung des Typs $\leq$. Dies machen wir durch einen Pfeil, der nach unten Zeigt deutlich. Damit erfüllen nicht nur die Punkte, die auf der Geraden liegen sondern auch diejenigen, die darunter liegen die erste Nebenbedingung.

So verfahren wir auch mit den anderen Nebenbedingungen.

Die gemeinsame Punktmenge heißt **Menge der zulässigen Lösungen**. Sie stellt alle möglichen Produktionsprogramme dar. Schraffieren Sie diese Menge.

Siehe Kapitel 3/Lösungen/3a.



Die Menge der zulässigen Lösungen hat folgender **Eckpunkte**:

$$P_0(0,0),\ P_1(0,10),\ P_3(8,5),\ P_4(10,3)\ ,\ P_5(11,0)$$

Nach der Theorie der linearen Optimierung

1. Ein Optimum eines linearen Optimierungsproblems wird immer in einem **Randpunkt** angenommen, falls es eine zulässige Lösung gibt.
2. Gibt es **nur** ein Optimum, so wird es in einem **Eckpunkt** angenommen.

Daher rechnen wir den Zielfunktionswert für die einzelnen Eckpunkte:

$P_0(0,0)$, $\quad z_0 = 0$

$P_1(0,10)$, $\quad z_1 = 240$

$P_2(8,5)$, $\quad z_3 = 288$

$P_5(10,3)$, $\quad z_4 = 282$

$P_5(11,0)$, $\quad z_5 = 231$

Damit hat das Problem ein eindeutiges Maximum:

$$x^* = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad z^* = 288.$$

Also der Betrieb erzielt einen maximalen Gewinn von 288 GE, wenn er vom P_1 8 Mengeneinheiten von P_2 5 Mengeneinheiten produziert.