Iterative Verfahren zur Lösung linearer und nichtlinearer Input-Output-Analyse

B. 1.

Zur Lösung des linearen Leontief-Modells

$$Ax + y = x$$

können folgende Methoden verwendet werden:

1. Jacobi
   Mit der Iterationsvorschrift:

$$x^{(k+1)} = (E - D)^{-1}\left(\left(U + O\right)x^{(k)} + y\right)$$

2. Gauß-Seidel

   Mit der Iterationsvorschrift:

$$x^{(k+1)} = (E - D - U)^{-1}\left(Ox^{(k)} + y\right)$$

BS. 1.

Zur Lösung sei folgendes Beispiel

$$Ax + y = x$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. Exakt
2. Nach Jacobi
3. Nach Gauß-Seidel

Lösung:

1. Exakt

$$E - A = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.3 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{25}{12} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{4} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (E-A)^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{12} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{4} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 45 \end{pmatrix}.$$

2. Nach Jacobi

$$x^{(k+1)} = (E-D)^{-1}\left((U+O)x^{(k)} + y\right)$$

Sei

$$D = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.3 & 0.0 \end{pmatrix} \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Dann erhalten wir:

$$x^{(1)} = (E-D)^{-1}\left((U+O)x^{(k)} + y\right)$$

Iterationen nach Jacobi

Iteration	x_1	x_2
0	24.000000	6.000000
1	42.000000	66.000000
2	42.200000	37.200000
3	52.400000	37.320000
4	52.440000	43.440000
5	54.480000	43.608000
6	54.536000	44.688000
7	54.896000	44.721600
8	54.907200	44.937600
9	54.979200	44.944320
10	54.981440	44.987520
11	54.995840	44.988864

3. Nach Gauß-Seidel

$$x^{(k+1)} = (E-D-U)^{-1}\left(Ox^{(k)} + y\right)$$

Sei

$$D = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.3 & 0.0 \end{pmatrix} \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$E-D-U=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & 0\\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\ (E-D-U)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3} & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix},$$

Iterationen nach Gauß-Seidel

Iteration	x_1	x_2
0	24.00000000	6.00000000
1	42.00000000	37.20000000
2	52.40000000	43.48000000
3	53.49000000	44.70000000
4	54.90000000	44.94000000
5	54.98000000	44.99000000
6	54.99700000	44.99800000
7	54.99933333	44.99960000

B. 2.

Das Gauß-Seidel-Verfahren konvergiert generell schneller als das Jacobi-Verfahren.

B. 3.

Erwähnt seien auch folgende Methoden:

- SOR-Verfahren (Successive Over-Relaxation): Eine Verfeinerung des Gauß-Seidel-Verfahrens, bei dem ein zusätzlicher Relaxationsparameter verwendet wird, um die Konvergenzrate zu beschleunigen.
- Fuzzy Linear System: Eine modernere iterative Methode zur Lösung des Leontief-Modells, die Ungenauigkeiten in den Eingangsdaten berücksichtigt. Hierbei werden die Inputmatrix und die Endnachfrage mit sogenannten Fuzzy-Zahlen dargestellt und das Gleichungssystem mit einem iterativen Verfahren wie dem Gauß-Seidel-Algorithmus gelöst.

B. 4. (Zur Auswahl der Methode)

Die Wahl der geeigneten numerischen Methode hängt von den spezifischen Bedingungen ab:

- Für kleine Systeme sind oft „exakte“ bzw. „direkte“ Methoden die bessere Wahl.
- Für dünnbesetzte große Systeme empfehlen sich die iterativen Methoden.
- Falls sich die Input-Output-Daten unsicher sind, sollte man die Fuzzy-Methoden verwenden.

D. 1. (*Nichtlineares Leontief-Modell)*

Als das *nichtlineares Leontief-Modell* bezeichnen wir:

$$A(x)x + y = x\,.$$

BS.2.

Sei

$$A(x)x + y = x$$

mit

$$A(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0.1 + 0.0001x_1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.05 + 0.0002x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- Nach Fixpunktiteration

$$\begin{cases} x_1 = (0.1 + 0.0001x_1)x_1 + 0.2x_2 + 100 \\ x_2 = 0.1x_1 + (0.05 + 0.0002x_2)x_2 + 50 \end{cases}$$

Iterationsvorschrift:

$$x_1^{(k+1)} = \left(0.1 + 0.0001x_1^{(k)}\right)x_1^{(k)} + 0.2x_2^{(k)} + 100$$
$$x_2^{(k+1)} = 0.1x_1^{(k)} + \left(0.05 + 0.0002x_2^{(k)}\right)x_2^{(k)} + 50$$

Nach Fixpunktiteration

Iteration	x_1	x_2
0	100.00	50.00
1	121.00	63.00
2	248.24	66.04
3	144.19	78.99

B. 5.

Die Fixpunktiteration konvergiert nicht immer. Wie man in der Tabelle sieht springen die Werte in der ersten Iteration stark. Die Konvergenz hängt entscheidend von der gewählten Iteration und dem Startwert ab.

- Nach Newton-Verfahren

  Das Gleichungssystem und die Iterationsvorschrift:

$$F(x) := x - A(x)x - y$$

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2) = x_1 - \left(0.1 + 0.0001x_1\right)x_1 - 0.2x_2 - 100 = 0 \\ F_2\left(x_1, x_2\right) = x_2 - 0.1x_1 - \left(0.05 + 0.0002x_2\right)x_2 - 50 = 0 \end{cases}$$

Die Iterationsvorschrift für das mehrdimensionale Newton-Verfahren

Lautet:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)})$$

Die Jacobi-Matrix $J(x)$ besteht aus den Partiellen Ableitungen der F_1

und F_2 nach den Variablen x_1 und x_2.

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0.9 - 0.0002x_1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = -0.2, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = -0.1, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 0.95 - 0.0004x_2$$

Somit ist die Jacobi-Matrix:

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0.9 - 0.0002 & -0.2 \\ 0.1 & 0.95 - 0.0004x_2 \end{pmatrix}.$$

Iterationen nach Newton

Iteration	x_1	x_2
0	100.00	50.00
1	127.72	66.96
2	127.71	67.05

B. 6.

Das Newton-Verfahren konvergiert deutlich schneller als die Fixpunktiteration. Nach nur einer Iteration sind die Werte beim Newton-Verfahren bereits sehr nahe an der endgültigen Lösung. Die quadratische Konvergenz des Verfahrens ist in er Tabelle klar ersichtlich.

Die Fixpunktiteration ist pro Schritt einfacher, da nur einfache Matrix-Vektor - Multiplikationen nötig sind. Das Newton-Verfahren erfordert in jedem Schritt die Berechnung der Jacobi-Matrix und deren Inversion, was rechenintensiver ist.

Literatur:

/1/ Bergman, A.; Pelmmons, R. J.

Nonnegative matrices in the mathematical sciences

Academic Press, NJ, USA, 1979

/2/ Grüne, Lars

Numerische Mathematik I

Mathematisches Institut, Fakultät für Mathematik und Physik, Kapitel 2.8,Universität Bayreuth Dritte Auflage, Wintersemester 227/2008

/3/ Krishna, Lala B.

Iterative Methods for Leontief Input-Output Model

Global Journal of Pure and Applied Mathematics

ISSN 0973-1768, Number 1 (2012), pp. 87-95

/4/ Leontief, W.

Input-Output Economics, 2nd Edition

Oxford University Press, UK, 1986

/5/ Miller, R.; Blair, P.

Input-Output Analysis: Foundations and Extensions

Prentice Hall, NY, 1985

/6/ Siassi, Jilla

Dissertation (B)

Möglichkeiten und Probleme der Anwendung statischer volkswirtschaftlicher Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Material- und Primärresourcenaufwandfunktionen

Berlin, 1987