

Intervallmathematik und ihre Anwendung in der Ökonomie

1. Grundlagen der Intervallmathematik

D. 1. 1. (Abgeschlossenes Intervall)

Ein abgeschlossenes Intervall ist

$$A := [a^-, a^+] = \{x \in \mathbb{R} \mid a^- \leq x \leq a^+\}.$$

D. 1. 2. (Grundoperationen mit Intervallen)

$$A + B := [a^- + b^-, a^+ + b^+]$$

$$A - B := [a^- - b^+, a^+ - b^-]$$

$$A \cdot B := [\min\{a^- \cdot b^-, a^- \cdot b^+, a^+ \cdot b^-, a^+ \cdot b^+\}, \max\{a^- \cdot b^-, a^- \cdot b^+, a^+ \cdot b^-, a^+ \cdot b^+\}]$$

$$A / B := [\min\{a^- / b^-, a^- / b^+, a^+ / b^-, a^+ / b^+\}, \max\{a^- / b^-, a^- / b^+, a^+ / b^-, a^+ / b^+\}]$$

D. 1. 3. (Erweiterte Intervallmathematik nach Nirmala-Ganesan)

Addition:

$$a_I + b_I = [a^-, a^+] + [b^-, b^+] = [m(a_I) + m(b_I) - k, m(a_I) + m(b_I) + k],$$

$$m(a_I) = \frac{a^- + a^+}{2}, \quad m(b_I) = \frac{b^- + b^+}{2}, \quad k = \frac{(b^+ + a^+) - (b^- + a^-)}{2}$$

Subtraktion:

$$a_I - b_I = [a^-, a^+] - [b^-, b^+] = [m(a_I) - m(b_I) - k, m(a_I) - m(b_I) + k],$$

$$m(a_I) = \frac{a^- + a^+}{2}, \quad m(b_I) = \frac{b^- + b^+}{2}, \quad k = \frac{(b^+ + a^+) - (b^- + a^-)}{2}$$

Multiplikation:

$$a_I \cdot b_I = [a^-, a^+] \cdot [b^-, b^+] = [m(a_I) \cdot m(b_I) - k, m(a_I) \cdot m(b_I) + k],$$

$$k = \min\{m(a_I) \cdot m(b_I) - \alpha, \beta - m(a_I) \cdot m(b_I)\}$$

$$\alpha = \min(a^- b^-, a^- b^+, a^+ b^-, a^+ b^+), \quad \beta = \max(a^- b^-, a^- b^+, a^+ b^-, a^+ b^+)$$

Es ist klar, dass

$$\lambda \cdot a_I = \begin{cases} [\lambda a^-, \lambda a^+], & \text{für } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a^+, \lambda a^-], & \text{für } \lambda < 0 \end{cases}$$

Division:

$$1 : a_I = \frac{1}{a_I} = \frac{1}{[a^-, a^+]} = \left[\frac{1}{m(a_I)} - k, \frac{1}{m(a_I)} + k \right]$$

$$k = \min \left\{ \frac{1}{a^+} \left(\frac{a^+ - a^-}{a^- + a^+} \right), \frac{1}{a^-} \left(\frac{a^+ - a^-}{a^- + a^+} \right) \right\}, 0 \notin [a^-, a^+]$$

D. 1. 4. (Intervallmatrix)

Eine *Intervallmatrix* ist eine Matrix, deren Elemente Intervalle sind:

$$A^I = [A^-, A^+] = \begin{pmatrix} a_{11}^I & a_{12}^I & \dots & a_{1n}^I \\ a_{21}^I & a_{22}^I & \dots & a_{2n}^I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^I & a_{m2}^I & \dots & a_{mn}^I \end{pmatrix} = (a_{ij}^I), \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

BS. 1. 1.

$$A^I = \begin{pmatrix} [1, 2] & [3, 4] \\ [5, 6] & [4, 7] \end{pmatrix}, \quad A^I = [A^-, A^+] = \{A : A^- \leq A \leq A^+\}$$

Hier: $A^- = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^+ = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

D. 1. 5. (Mittelpunkte einer Intervallmatrix)

$$m(A^I) = \begin{pmatrix} m(a_{11}^I) & m(a_{12}^I) & \dots & m(a_{1n}^I) \\ m(a_{21}^I) & m(a_{22}^I) & \dots & m(a_{2n}^I) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m(a_{m1}^I) & m(a_{m2}^I) & \dots & m(a_{mn}^I) \end{pmatrix} = (m(a_{ij}^I)), \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

B. 1. 1. (Einige Operationen mit Intervallmatrizen)

Sei

$$D = IR - \bar{II} = \{[a^-, a^+] : a^-, a^+ = R^1\}$$

mit

$IR = \{A = [a^-, a^+] : a^- \leq a^+ \wedge a^-, a^+ \in \mathbb{R}^1\}$: die Menge aller eigentlichen Intervalle

$\overline{II} = \{A = [a^-, a^+] : a^- > a^+ \wedge a^-, a^+ \in \mathbb{R}^1\}$: die Menge aller uneigentlichen Intervalle.

Für $A^I, B^I \in D^{m \times n}$, $X^I \in D^n$, $\alpha^I \in D$ gilt:

1. $\alpha^I A^I = \alpha^I (a_{ij}^I)$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$
2. $A^I + B^I = (a_{ij}^I + b_{ij}^I)$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$
3. $A^I - B^I = (a_{ij}^I - b_{ij}^I)$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$
4. $A^I \cdot B^I = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^I b_{ik}^I \right)$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$
5. $A^I \cdot X^I = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^I X_{ij}^I \right)$, $1 \leq i \leq m$

B. 1. 2.

Die Determinante einer Matrix und ihre Berechnung kann unmittelbar auf eine Intervallmatrix verallgemeinert werden.

Genauso die Invertierung einer regulären Intervallmatrix.

BS. 1. 2.

Invertiere die Matrix

$$A^I = \begin{pmatrix} [1,3] & [0,1] \\ [0,1] & [3,5] \end{pmatrix},$$

falls die Inverse existiert.

Lösung:

Wir verwenden die erweiterte Intervallarithmetik.

$$\det A^I = [1,3][3,5] - [0,1][0,1]$$

$$m[1,3] = 2, \quad m[0,1] = \frac{1}{2}, \quad m[0,1] = \frac{1}{2}, \quad m[3,5] = 4$$

$$\alpha = \min\{3, 5, 9, 15\} = 3, \quad \beta = \max\{3, 5, 9, 15\} = 15, \quad k = \min\{8 - 3, 15 - 8\} = 5$$

$$[m[1,3] \cdot m[3,5] - 5, m[1,3] \cdot m[3,5] + 5] = [3, 13]$$

$$\left[m[0,1] \cdot m[0,1] - 5, m[0,1] \cdot m[0,1] + 5 \right] = [0,1/2]$$

$$\det A^I = [1,3][3,5] - [0,1][0,1] = [3,13] - [0,1/2] = [5/2,13] > 0$$

Damit ist A^I regulär und invertierbar.

$$A^{I^{-1}} = \frac{\text{adj}(A^I)}{\det A^I} = \frac{1}{[5/2,13]} \begin{pmatrix} [3,5] & [-1,0] \\ [-1,0] & [3,5] \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{[5/2,13]} = \begin{bmatrix} \frac{31}{13 \cdot 31} & \frac{73}{13 \cdot 31} \end{bmatrix}$$

$$A^{I^{-1}} = \begin{pmatrix} [3,5] \cdot \begin{bmatrix} \frac{31}{13 \cdot 31} & \frac{73}{13 \cdot 31} \end{bmatrix} & [-1,0] \cdot \begin{bmatrix} \frac{31}{13 \cdot 31} & \frac{73}{13 \cdot 31} \end{bmatrix} \\ [-1,0] \cdot \begin{bmatrix} \frac{31}{13 \cdot 31} & \frac{73}{13 \cdot 31} \end{bmatrix} & [1,3] \cdot \begin{bmatrix} \frac{31}{13 \cdot 31} & \frac{73}{13 \cdot 31} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$[3,5] \cdot \begin{bmatrix} \frac{31}{13 \cdot 31} & \frac{73}{13 \cdot 31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{93}{13 \cdot 31} & \frac{323}{13 \cdot 31} \end{bmatrix}$$

$$[-1,0] \cdot \begin{bmatrix} \frac{31}{13 \cdot 31} & \frac{73}{13 \cdot 31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-52}{13 \cdot 31} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[-1,3] \cdot \begin{bmatrix} \frac{31}{13 \cdot 31} & \frac{73}{13 \cdot 31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{31}{13 \cdot 31} & \frac{177}{13 \cdot 31} \end{bmatrix}$$

$$A^{I^{-1}} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{93}{13 \cdot 31} & \frac{323}{13 \cdot 31} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{-52}{13 \cdot 31} & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{-52}{13 \cdot 31} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{31}{13 \cdot 31} & \frac{177}{13 \cdot 31} \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{403} \begin{pmatrix} [93,323] & [-52,0] \\ [-52,0] & [31,177] \end{pmatrix}$$

2. Lineare Gleichungssysteme mit Intervallkoeffizienten

D. 2. 1. (Lineare Gleichungssysteme mit Intervallkoeffizienten)

Als ein *lineares Gleichungssystem mit Intervallkoeffizienten* (in Matrizenschreibweise) bezeichnen wir:

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^-, a_{11}^+ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{12}^-, a_{12}^+ \end{bmatrix} & \cdot & \cdot & \cdot & \begin{bmatrix} a_{1m}^-, a_{1n}^+ \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{21}^-, a_{21}^+ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{22}^-, a_{22}^+ \end{bmatrix} & \cdot & \cdot & \cdot & \begin{bmatrix} a_{2n}^-, a_{21}^+ \end{bmatrix} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \begin{bmatrix} a_{n1}^-, a_{n1}^+ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{n2}^-, a_{n2}^+ \end{bmatrix} & \cdot & \cdot & \cdot & \begin{bmatrix} a_{nn}^-, a_{nn}^+ \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1^-, x_1^+ \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_2^-, x_2^+ \end{bmatrix} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \begin{bmatrix} x_n^-, x_n^+ \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} b_1^-, b_1^+ \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_2^-, b_2^+ \end{bmatrix} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \begin{bmatrix} b_n^-, b_n^+ \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

B. 2. 1.

Wir behandeln hier folgende Verfahren:

1. Zerlegungsmethode
2. Berechnung mit Intervallmittelwerten
3. Das Jacobi-Verfahren
4. Das Verfahren von Gauß-Seidel

Alg. 2. 1. (Die Zerlegungsmethode)

Nach dieser Methode wird das lineare Gleichungssystem in zwei Subsysteme zerlegt. Danach werden die Lösungen der beiden Subsysteme miteinander kombiniert.

System 1

$$a_{11}^- x_1^- + a_{12}^- x_2^- + \dots + a_{1j}^- x_j^- + \dots + a_{1n}^- x_n^- = y_1$$

...

$$a_{i1}^- x_1^- + a_{i2}^- x_2^- + \dots + a_{ij}^- x_j^- + \dots + a_{in}^- x_n^- = y_i$$

...

$$a_{n1}^- x_1^- + a_{n2}^- x_2^- + \dots + a_{nj}^- x_j^- + \dots + a_{nn}^- x_n^- = y_n$$

System 2

$$a_{11}^+ x_1^+ + a_{12}^+ x_2^+ + \dots + a_{1j}^+ x_j^+ + \dots + a_{1n}^+ x_n^+ = y_1$$

...

$$a_{11}^- x_1^+ + a_{12}^- x_2^+ + \dots + a_{1j}^- x_j^+ + \dots + a_{1n}^- x_n^+ = y_1$$

...

$$a_{n1}^- x_n^+ + a_{n2}^- x_2^+ + \dots + a_{nj}^- x_j^+ + \dots + a_{nn}^- x_n^+ = y_n$$

BS. 2. 1.

Zur Herstellung von drei verschiedenen Produkten P1, P2 und P3 werden drei Rohstoffe R1, R2 und R3 benötigt. Die nachfolgende Tabelle zeigt den Rohstoffverbrauch pro Rohstoffeinheit und die verfügbaren Rohstoffmengen:

Rohstoffe	Rohstoffmenge/Produkteinheit			Rohstoffmenge
	P1	P2	P3	
R1	[9.9,10.1]	[1.9, 2.1]	[2.9, 3.1]	[14.9,15.1]
R2	[2.9, 3.1]	[12.9,13.1]	[0.9, 1.1]	[14.9,15.1]
R3	[1.9, 2.1]	[3.9, 4.1]	[14.9,15.1]	[25.9,26.1]

Wie viel Einheiten können von jedem Produkt hergestellt werden, wenn alle Rohstoffe voll ausgeschöpft werden?

Lösung:

Es muss also folgendes Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{pmatrix} [9.9,10.1] & [1.9,2.1] & [2.9,3.1] \\ [2.9,3.1] & [12.9,13.1] & [0.9,1.1] \\ [1.9,2.1] & [3.9,4.1] & [14.9,15.1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [x_1^-, x_1^+] \\ [x_2^-, x_2^+] \\ [x_3^-, x_3^+] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [14.9,15.1] \\ [19.9,20.1] \\ [25.9,26.1] \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem wird zunächst nach Alg. 2. 1. (Zerlegungsmethode) gelöst. Dazu wird das System als zwei Subsysteme geschrieben werden:

$$A^- = \begin{pmatrix} 9.9 & 1.9 & 2.9 \\ 2.9 & 12.9 & 0.9 \\ 1.9 & 3.9 & 14.9 \end{pmatrix}, \quad y^- = \begin{pmatrix} 14.9 \\ 19.9 \\ 25.9 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \begin{pmatrix} 10.1 & 2.1 & 3.1 \\ 3.1 & 13.1 & 1.1 \\ 2.1 & 4.1 & 15.1 \end{pmatrix}, \quad y^+ = \begin{pmatrix} 15.1 \\ 20.1 \\ 26.1 \end{pmatrix}$$

$$x^- = (0.884466 \quad 1.253284 \quad 1.297430)^T \quad x^+ = (0.847932 \quad 1.226420 \quad 1.277551)^T$$

Die Lösung der obigen Subsysteme ergibt:

$$\begin{pmatrix} [x_1^-, x_1^+] \\ [x_2^-, x_2^+] \\ [x_3^-, x_3^+] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0.847932, 0.884466] \\ [1.226420, 1.253284] \\ [1.277551, 1.297430] \end{pmatrix}$$

Alg. 2. 2. (Berechnung mit Intervallmittelwerten)

$$x_i^m := \frac{x_i^- + x_i^+}{2}$$

BS. 2. 1. (Fortsetzung)

Lösung nach mit Intervallmittelwerten:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 3 & 13 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 26 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 0.865881 \\ 1.239618 \\ 1.287318 \end{pmatrix}$$

Alg. 2. 2. (Die Jacobi-Methode)

Sei

$$D := \begin{pmatrix} [a_{11}^-, a_{11}^+] & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & [a_{22}^-, a_{22}^+] & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & [a_{nn}^-, a_{nn}^+] \end{pmatrix},$$

$$U := \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ [a_{21}^-, a_{21}^+] & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ [a_{n1}^-, a_{n1}^+] & . & . & . & [a_{n,n-1}^-, a_{n,n-1}^+] & 0 \end{pmatrix},$$

$$O := \begin{pmatrix} 0 & [a_{12}^-, a_{12}^+] & . & . & . & [a_{1n}^-, a_{1n}^+] \\ 0 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & [a_{n-1,n}^-, a_{n-1,n}^+] \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dann lässt sich nun das Gleichungssystem mit Intervallkoeffizienten in Definition D. 2.1. folgendermaßen schreiben:

$$(D - U - O)x = y \quad \Rightarrow \quad Dx = (U + O)x + y.$$

Vorausgesetzt, dass D^{-1} existiert, erhält man:

$$x = D^{-1} \{ (U + O)x + y \} = D^{-1} (U + O)x + D^{-1}y.$$

Die Iterationsvorschrift nach dem Jacobi-Algorithmus lautet nun:

$$x^{(k)} = D^{-1} (U + O)x^{(k-1)} + D^{-1}y, \quad k = 1, 2, \dots$$

BS. 2. 1. (Fortsetzung)

Lösung nach der Jacobi-Methode:

Iterationen nach Jacobi

Iteration	x_1	x_2	x_3
0	[0.000, 0.000]	[0.000, 0.000]	[0.000, 0.000]
1	[1.475, 1.525]	[1.519, 1.558]	[1.715, 1.752]
2	[0.614, 0.731]	[1.011, 1.107]	[1.080, 1.166]
3	[0.887, 1.015]	[1.248, 1.345]	[1.313, 1.409]
4	[0.763, 0.901]	[1.161, 1.267]	[1.209, 1.312]
5	[0.809, 0.948]	[1.196, 1.302]	[1.246, 1.351]
...			
18	[0.795, 0.936]	[1.185, 1.293]	[1.234, 1.340]

Alg. 2. 3. (Die Gauß-Seidel-Methode)

Nach Gauß-Seidel-Verfahren

$$x^{(k)} = (D - U)^{-1} O.x^{(k-1)} + y, \quad k = 1, 2, \dots$$

Die Matrizen D , U , O wie bei Jacobi.

BS. 2. 1. *(Fortsetzung)*

Lösung nach der Gauß-Seidel-Methode:

Iterationen nach Gauß-Seidel

Iteration	x_1	x_2	x_3
0	[0.000,0.000]	[0.000,0.000]	[0.000,0.000]
1	[1.475,1.525]	[1.158,1.226]	[1.170,1.260]
2	[0.833,0.960]	[1.186,1.289]	[1.232,1.353]
3	[0.797,0.937]	[1.185,1.293]	[1.234,1.340]
4	[0.795,0.936]	[1.185,1.293]	[1.234,1.340]
5	[0.795,0.936]	[1.185,1.293]	[1.234,1.340]
...			
8	[0.795,0.936]	[1.185,1.293]	[1.234,1.340]

3. Lineare Optimierungsprobleme mit Intervallkoeffizienten

D. 3. 1.

Unter einem linearen Optimierungsproblem mit Intervallkoeffizienten versteht man folgendes Problem:

$$z = \sum_{j=1}^n [c_j^-, c_j^+] \cdot [x_j^-, x_j^+] \rightarrow \text{Max!}$$

unter der Bedingung:

$$\begin{pmatrix} [a_{11}^-, a_{11}^+] & [a_{12}^-, a_{12}^+] & \cdot & \cdot & \cdot & [a_{1m}^-, a_{1n}^+] \\ [a_{21}^-, a_{21}^+] & [a_{22}^-, a_{22}^+] & \cdot & \cdot & \cdot & [a_{2n}^-, a_{21}^+] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [a_{m1}^-, a_{m1}^+] & [a_{m2}^-, a_{m2}^+] & \cdot & \cdot & \cdot & [a_{mn}^-, a_{mn}^+] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [x_1^-, x_1^+] \\ [x_2^-, x_2^+] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ [x_n^-, x_n^+] \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} [b_1^-, b_1^+] \\ [b_2^-, b_2^+] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ [b_m^-, b_m^+] \end{pmatrix},$$

$$a_{ij}^- \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad x_j^- \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

B. 3. 1.

Es gibt keine allgemeine Methode zur Lösung eines linearen Problems mit Intervallkoeffizienten, wie z.B. die Simplexmethode. Zu den Ersatzmethoden zur Lösung spezieller Probleme kann man die Zerlegungsmethode und die Methode, die von Mittelwerten der Intervalle ausgeht, nennen. Diese werden im Weiteren dargelegt.

B. 3. 2.

Ein lineares Optimierungsproblem mit Intervallkoeffizienten:

$$z = [4, 6]x_1 + [2, 1]x_2 \rightarrow \text{Max!}$$

unter den Bedingungen:

$$[1.0, 2.0]x_1 + [1.0, 1.5]x_2 \leq [6, 8]$$

$$[0.5, 1.0]x_1 + [2.0, 3.0]x_2 \leq [4, 5]$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. Lösung nach der Zerlegungsmethode

Das pessimistische Szenario (Zielwert möglichst klein)

$$4x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{Max!}$$

$$2x_1 + \frac{3}{2}x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Die Normalform:

$$4x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{Max!}$$

$$2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 4$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_0
x_3	2	1.5	1	0	6
x_4	1	3.0	0	1	4
z	-4	-2	0	0	0
x_1	1	0.75	0.5	0	3
x_4	0	2.25	-0.5	1	1
z	0	1	2	0	12

$$x^* = (3 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^T, \quad z^* = 12$$

Das optimistische Szenario (Zielwert möglichst groß)

$$6x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{Max!}$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Die Normalform:

$$6x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{Max!}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

$$0.5x_1 + 2x_2 + x_4 = 5$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$$

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_0
x_3	1	1	1	0	8
x_4	0.5	2	0	1	5
z	-6	-3	0	0	0
x_1	1	1	1	0	8
x_4	0	1.5	-0.5	1	1
z	0	3	6	0	48

$$x^* = (8 \ 0 \ 0 \ 1)^T, \ z^* = 18$$

Gesamtbefund (Intervall der optimalen Zielfunktionswerte):

$$z_{\min}^* = 12 \quad \text{und} \quad z_{\max}^* = 48$$

2. Lösung mit den Mittelwerten

$$Z = 5.0x_1 + 1.5x_2 \rightarrow \text{Max!}$$

$$1.50x_1 + 1.25x_2 \leq 7.00$$

$$0.75x_1 + 2.50x_2 \leq 4.50$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Die Normalform:

$$Z = 5.0x_1 + 1.5x_2 \rightarrow \text{Max!}$$

$$1.50x_1 + 1.25x_2 + x_3 = 7.00$$

$$0.75x_1 + 2.50x_2 + x_4 = 4.50$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$$

Simplex tableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_0
x_3	1.50	1.25	1	0	7.00
x_4	0.75	2.50	0	1	4.50
z	-5.0	-1.5	0	0	0
x_1	1	0.833	0.667	0	4.667
x_4	0	1.875	-0.500	1	1
z	0	2.667	3.333	0	23.333

$$x^* = (4.667 \quad 0.000 \quad 0 \quad 1.000)^T, \quad z^* = 23.333$$

Literatur:

[1] Amine, Benhari Mohamed; Kaicer Mohammed

Analysis of uncertainty in Leontief model by interval arithmetic
Stat. Optim., Inf. Comput., Vol. 13, May 2025, pp 2011-2026

[2] Babos, Alina

Linear programming with interval coefficients
International Conference Knowledge-Based Organization, Vol. XXVIII, No. 3,
2022

[3] Chinneck J.W., Ramadan K.

Linear programming with interval coefficients
Journal of Operational Society, 2000, Vol. 51: 209-220

[4] Jerrel, Max E.

Interval arithmetic for input-output models with inexact data
Computational Economics, 10: 89 – 100, 1997

[5] Ramadan, K.

Linear programming with interval coefficients, Dissertation paper, Carleton University, 1996

[6] Siassi, J.

Das Leontief-Model mit Intervallkoeffizienten

Siehe: www.jsiassi.de (Publikationen)