Einführung in die Theorie der Input-Output-Analyse

Jilla Siassi

Einführung in die Theorie der Input-Output-Analyse

I

Das lineare Input-Output-Modell

D. 1. 1.

Unter dem *statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodell mit linearen Aufwandsfunktionen* verstehen wir:

$$x = b(x) + y \qquad \text{(P. 1. 1.)}$$

mit

$$b:\ R_+^n \to R_+^n, \quad b(x) := Ax, \quad A \in M_{(n,n)}, \quad A \geq 0,$$

$$x := (x_i) \in R_+^n,$$

$$y := (y_i) \in R_+^n,$$

oder in Summenschreibweise:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \qquad \text{(P. 1. 1'.)}$$

Hier sind:

$n:$	die Anzahl der Sektoren in der Volkswirtschaft,
$a_{ij},\ \ i, j = 1, 2, \dots, n:$	der Materialaufwand des $i-\text{ten}$ Sektors zur Herstellung einer Einheit des Produktes des $j-\text{ten}$ Sektors (kurz: *„Materialaufwandskoeffizient"*),
$x_i,\ i = 1, 2, \dots, n:$	die Gesamtproduktion des $i-\text{ten}$ Sektors,
$y_i,\ i = 1, 2, \dots, n:$	die Endnachfrage des $i-\text{ten}$ Sektors.

S. 1. 1.

$$A:\ R_+^n \to R_+^n \quad \text{ist isoton} \quad \Leftrightarrow \quad A \geq 0.$$

Beweis:

$"\Rightarrow"$

Sei $A:\ R_+^n \to R_+^n$ isoton. Dann gilt:

$$e^i \geq 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$Ae^i \geq 0, \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

$$A \geq 0.$$

$" \Leftarrow "$

Sei $A \geq 0.$ Dann folgt aus

$$x^1 \leq x^2$$

auch

$$Ax^1 \leq Ax^2. \qquad \textit{q. e. d.}$$

B. 1. 1.

Für ein gegebenes $y \in R_+^n$ lässt sich (P. 1. 1.) zu

$$y = x - Ax$$

bzw.

$$y = Fx \tag{1. 1.}$$

mit

$$F := (E - A)$$

schreiben.

D. 1. 2.

Eine reelle Matrix $F := (f_{ij}) \in M_{(n,n)}$ mit $f_{ij} \leq 0, \ \forall i \neq j$, heißt $M-$*Matrix*, in Zeichen $F \in M_M$, wenn $\det F \neq 0$ und $F^{-1} \geq 0$. F heißt dann auch *nichtnegativ invertierbar*.

S. 1. 2.

Gegeben sei

$$F := (f_{ij}) \in M_{(n,n)}, \qquad f_{ij} \leq 0, \ \forall i \neq j.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $F \in M_M$.

b) Für ein $y \in R_n^+ \setminus \{0\}$ es existiert ein $x \in R_+^n$, derart, dass $Fx = y$ gilt.

c) Für alle $y \in R_n^+$ es existiert ein $x \in R_+^n$, derart, dass $Fx = y$ gilt.

d)

$$\det\begin{pmatrix} f_{11} & . & . & . & f_{1p} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ f_{p1} & . & . & . & f_{pp} \end{pmatrix} > 0, \qquad p = 1, 2, ..., n. \qquad (1.\ 2.)$$

(Die Determinanten in (1. 2.) nennt man *führende Hauptminoren*.)

e) $$\det\left(f_{ij}\right)_{i,\,j\in L} > 0, \quad \forall L \subset \{1, 2, ..., n\} \qquad (1.\ 3.)$$

Die Determinanten (1. 3.) nennt man *Hauptminoren*.

Beweis:

1) „b $\Rightarrow$ d“ (Induktion)

<u>*Induktionsanfang:*</u>

Sei $n = 1$. Das Gleichungssystem (1. 1.) lautet dann:

$$f_{11}x_1 = y_1.$$

Wenn $x_1 \geq 0$ ist für ein $y_1 > 0$, dann muss auch $f_{11} > 0$ sein.

<u>*Induktionsannahme:*</u>

Die Aussage ist richtig für $n-1$. Nach b) hat $Fx = y$ eine Lösung $x \in R_+^n$ für ein $y \in R_+^n \setminus \{0\}$.

Aus der ersten Gleichung erhält man:

$$f_{11}x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^{2} f_{ij}x_j. \qquad (1.\ 4.)$$

Wegen $y_1 > 0$ und $f_{ij} \leq 0,\ x_j \geq 0,\ j = 2, 3, ..., n,$ ist $f_{11}x_1 > 0$, und damit $f_{11} > 0.$

Jetzt wenden wir das Gaußsche Eliminationsverfahren so auf das Gleichungssystem $Fx = y$ an, dass wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & . & . & . & f_{1n} \\ 0 & f_{22}^* & . & . & . & f_{2n}^* \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 0 & f_{2n}^* & . & . & . & f_{nn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2^* \\ . \\ . \\ . \\ y_n^* \end{pmatrix}. \qquad (1.\ 5.)$$

Dabei ist:

$$f_{ij}^* := f_{ij} - f_{i1}\frac{f_{1j}}{f_{11}}, \quad i, j = 2, 3, ..., n,$$

$$y_i^* := y_i - f_{i1}\frac{y_1}{f_{11}}, \qquad i = 2,3,\dots,n.$$

Wegen $f_{ij} \le 0$ für $i, j = 2,3,\dots,n,\ i \ne j,$ und $y_i > 0$ für $i = 2,3,\dots,n$ folgt:

$$f_{ij}^* \le 0, \quad i, j = 2,3,\dots,n; \quad i \ne j,$$

$$y_i^* > 0, \quad i = 2,3,\dots,n.$$

Also erfüllt das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=2}^{n} f_{ij}^* x_j = y_i^*, \quad i = 2,3,\dots,n,$$

die Bedingung b) und wir erhalten nach Induktionsvoraussetzung:

$$\det\begin{pmatrix} f_{22}^* & . & . & . & f_{2l}^* \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ f_{l2}^* & . & . & . & f_{ll}^* \end{pmatrix} > 0, \quad l = 2,3,\dots,n.$$

Damit folgt:

$$\det\begin{pmatrix} f_{11} & . & . & . & f_{1p} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ f_{p1} & . & . & . & f_{pp} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & . & . & . & f_{1l} \\ 0 & f_{22}^* & . & . & . & f_{2l}^* \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 0 & f_{l2}^* & . & . & . & f_{ll}^* \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} f_{22}^* & . & . & . & f_{2l}^* \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ f_{l2}^* & . & . & . & f_{ll}^* \end{pmatrix} > 0, \quad \mathrm{l} = 2,3,\dots,n.$$

2) „d $\Rightarrow$ c“ (Induktion)

Sei $n = 1$. Dann hat das Gleichungssystem $f_{11}x_1 = y_1$ wegen $f_{11} > 0$ für jedes $y_1 \ge 0$ die Lösung:

$$x_1 = \frac{y_1}{f_{11}} \ge 0.$$

<u>*Induktionsannahme:*</u>

Die Aussage ist richtig für $n-1$. Wegen d) gilt insbesondere $f_{11} > 0$, so dass wir in 1) die Gaußsche Elimination auf das Gleichungssystem $Fx = y$ mit beliebigem $y \ge 0$ anwenden können. Wie oben erhalten wir das System:

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}^* x_j = y_i^*, \quad i = 2,3,\dots,n,$$

mit

$$f_{ij}^* < 0, \quad i, j = 2,3,...,n; \; i \neq j,$$

$$y_i^* \geq 0, \quad i = 2,3,...,n.$$

Wegen

$$\det\begin{pmatrix} f_{22}^* & . & . & . & f_{2l}^* \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ f_{l2}^* & . & . & . & f_{ll}^* \end{pmatrix} = \frac{1}{t_{11}} \det\begin{pmatrix} f_{11} & . & . & . & f_{1l} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ f_{l1} & . & . & . & f_{ll} \end{pmatrix} > 0, \quad p \in \{2,3,...,n\},$$

hat das obige Gleichungssystem nach Induktionsannahme eine Lösung $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, ..., x_n \geq 0$ für diese $y_i^*,\; i = 2,3,...,n$.

Aus (1. 4.) erhalten wir:

$$x_1 = \frac{1}{f_{11}}(y_1 - \sum_{j=2}^{n} f_{1j} x_j) \geq 0.$$

Damit haben wir eine Lösung von (1. 5.) gefunden, die wegen der Äquivalenz der Gleichungssysteme auch $Fx = y$ löst.

3) „c$\Rightarrow$b“ ist offensichtlich.

4) „e$\Rightarrow$d“:

Diese Implikation ist auch klar. Nehmen wir an, dass c) erfüllt ist. Dann ist c) auch für jedes Gleichungssystem erfüllt, das durch gleichartiges Umnummerieren der Zeilen und Spalten von F entsteht. So kann jede Hauptuntermatrix zur führenden Hauptuntermatrix gemacht werden, wobei sich ihre Determinante nicht ändert. Damit folgt die Bedingung e), indem man die Implikation) „e$\Rightarrow$ d“ auf das umnummerierte System anwendet.

5) „a$\Rightarrow$c“:

Sei $F \in M_M$. Dann hat das Gleichungssystem $Fx = y$ die eindeutige Lösung:

$$x = F^{-1}y \geq 0, \quad \forall y \in R_+^n.$$

6) „c$\Rightarrow$d“:

Nehmen wir an, dass c) erfüllt ist. Dann folgt wegen d) die Existenz von F^{-1}, und wir erhalten eine eindeutige Lösung als $x = F^{-1}y$. Es ist also

$$x = F^{-1}y \geq 0, \quad \forall y \in R_+^n.$$

Damit gilt $F^{-1}e^i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,$ also $F^{-1} \geq 0.$ *q. e. d.*

B. 1. 2.

Die Bedingungen d) und e), auch bekannt als Hawkins-Simon-Bedingung, erlauben wegen der Komplexität der Definition einer Determinante keine direkte ökonomische Interpretation. Wir können aber aus Bedingung e) schließen, dass

$$a_{ii} < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

gilt. Daraus folgt

$$a_{ii} x_i < x_i, \quad = 1, 2, \ldots, n.$$

Das heißt, dass die Menge des Produktes $i,$ die zur Herstellung seiner eigenen Gesamtproduktion x_i eingesetzt wird, kleiner ist als x_i. Wäre

$$a_{ii} x_i \geq x_i \quad \text{für ein } i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

so wäre der Sektor unproduktiv, denn vom Produkt j würde mehr eingesetzt als ausgebracht und er hätte damit keine positive Gesamtproduktion. In diesem Falle wäre auch die Bedingung b) nicht erfüllt, die besagt, dass für eine Endnachfrage eine nichtnegative Produktion existiert.

Man beachte, dass in den Bedingungen b) und c) die Eindeutigkeit nicht gefordert wird.

S. 1. 3.

Sei

$$F := E - A$$

mit

$$A \in M_{(n,n)}; \quad A \geq 0.$$

Dann gilt für alle $x^1, x^2 \in R_+^n,\ x^1 \leq x^2,\ x_i^1 = x_i^2$ für mindestens ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, die Beziehung

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij} x_j^1 \geq \sum_{j=1}^{n} f_{ij} x_j^2, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Beweis:

Sei $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $x_i^1 = x_i^2$. Dann gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij} x_j^1 - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} x_j^2 = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} (x_j^1 - x_j^2)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - a_{ij})(x_j^1 - x_j^2)$$

$$= x_i^1 - x_i^2 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j^1 - x_j^2)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j^2 - x_j^1)$$

$$\geq 0.$$ *q. e. d.*

B. 1. 3.

Die Aussage von S. 1. 3. lässt sich folgendermaßen ökonomisch interpretieren:

Eine Erhöhung der Gesamtproduktion eines Teils des produktiven Bereichs führt zum Rückgang der Endnachfrage bei den Sektoren, deren Gesamtproduktion konstant geblieben ist.

S. 1. 4.

Sei $F \in M_M$. Dann gilt:

$$\left\langle Fx^1 \geq Fx^2,\ x^1, x^2 \in R_+^n \right\rangle \ \Rightarrow\ x^1 \geq x^2.$$

Beweis:

Es gilt:

$$x^1 = F^{-1}Fx^1 \ \geq F^{-1}Fx^2 = x^2.$$ *q. e. d.*

B. 1. 4.

S. 1. 4. bedeutet: Eine Erhöhung der Endnachfrage erfordert eine Erhöhung der Gesamtproduktion.

S. 1. 5.

Gegeben sei

$$A \in M\left(n, n\right), \quad A \geq 0.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $(E - A) \in M_M$.

b) $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| < 1,$

$\lambda_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, n:\ i-$ter Eigenwert der Matrix A,

$\rho(A):$ der Spektralradius von A.

c) Es gibt eine Norm mit

$$\|A\| < 1.$$

d) $\lim\limits_{l \to \infty} A^l = 0$.

e) Die Neumannsche Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} A^i$ konvergiert.

Beweis:

1)

„b $\Rightarrow$ d“ :

Sei $\rho(A) < 1$. Dann gibt es eine Norm mit

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon < 1 \text{ für eine geeignetes } \varepsilon > 0.$$

Es gilt ferner wegen

$$\left\|A^l\right\| \leq \|A\|^l$$

die Behauptung

$$\lim_{l \to \infty} A^l = 0.$$

„d $\Rightarrow$ b“ :

Wir nehmen an:

$$\exists \text{ ein } \lambda : \; |\lambda| \geq 1.$$

Sei $x \neq 0$ der zugehörige Eigenvektor. Dann gilt

$$A^l x = \lambda^l x, \;\; \forall l \in N,$$

und die Folge $\{A^{(l)} x\}_{l \in N}$ geht nicht gegen Null.

2)

„b $\Rightarrow$ e“ :

Sei $\rho(A) < 1$ und $Ax = \lambda x$. Wegen

$$\begin{aligned}(E - A)x &= x - Ax \\ &= x - \lambda x \\ &= (1 - \lambda)x\end{aligned}$$

ist $(1 - \lambda)$ Eigenwert von $(E - A)$ zum Eigenvektor x von $(E - A)$.

Es gilt ferner:

$$|1 - \lambda| \geq |1 - 1 - |\lambda\|\; > 0, \qquad (\because |\lambda| < 1)$$

d.h. $(E-A)$ ist invertierbar.

Weiter ergibt sich aus

$$(E-A)(E+A+\ldots+A^{l-1})=E-A^{l}$$

durch Multiplikation mit $(E-A)^{-1}$ von links

$$E+A+\ldots+A^{l-1}=(E-A)^{-1}-(E-A)^{-1}A^{l}. \qquad (1.\ 6.)$$

Die rechte Seite von (1. 6.) geht wegen 2) gegen $(E-A)^{-1}$ für $l\to\infty$, d.h.

$$(E-A)^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}A^{i}. \qquad (1.\ 7.)$$

„e $\Rightarrow$ b“ :

Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty}A^{i}$ folgt $\lim_{l\to\infty}A^{l}=0$. Wegen 1) ist dann $\rho(A)<1$. Wie oben erhält man (1. 7.) und sieht, dass die Reihe gegen $(E-A)^{-1}$ konvergiert.

3)

„c $\Rightarrow$ b“ :

Zunächst wird folgende Aussage bewiesen:

Sei $A\in M(n,n)$ reell. Dann gilt

$$\rho(A)\leq\|A\|. \qquad (1.\ 8.)$$

Es gelte

$$Ax=\lambda x,\quad \lambda\in C,\ x\in C^{n}.$$

Daraus folgt:

$$\|A\|\cdot\|x\|\geq\|Ax\| =\|\lambda x\| =|\lambda|\cdot\|x\|.$$

Wegen $x\neq 0$ folgt hieraus $\|A\|\geq|\lambda|$ und damit die Behauptung.

Die Aussage „c $\Rightarrow$ b“ folgt nun wegen (1. 8.): $\rho(A)\leq\|A\|<1$.

4)

„b $\Rightarrow$ c“ :

$$\exists\varepsilon>0:\ \rho(A)+\varepsilon<1. \qquad (\because\ \rho(A)<1)$$

Damit ist die Existenz einer Norm mit

$$\|A\| < \rho(A) + \varepsilon < 1$$

gesichert.

5)

„b $\Rightarrow$ a“ :

Ist $\rho(A) < 1$, so existiert $(E-A)^{-1}$ nach „b $\Rightarrow$ e“ und man hat

$$(E-A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i.$$

$(E-A)^{-1}$ ist nichtnegativ, weil jeder Summand der Reihe nichtnegativ ist. Trivialerweise gilt

$$\delta_{ij} - a_{ij} \leq 0,\ i, j = 1, 2, ..., n;\ i \neq j.$$

„a $\Rightarrow$ b“ :

Sei $(E-A)^{-1} \geq 0$ und λ ein Eigenvektor von A zum Eigenvektor $x \neq 0$. Dann ergibt sich

$$|\lambda| \left(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n| \right)^T \leq A \left(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n| \right)^T$$

und weiter

$$(E-A) \left(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n| \right)^T \leq (1 - |\lambda|) \left(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n| \right)^T .$$

Es folgt

$$\left(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n| \right)^T \leq (E-A)^{-1} \left(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n| \right)^T$$

und daraus wegen $x \neq 0$ und $(E-A)^{-1} \geq 0$

$$|\lambda| < 1.$$ *q. e. d.*

B. 1. 5.

Die Bedeutung von Aussage b) liegt in den durch (1. 8.) Beziehungen zwischen dem Spektralradius und einer Norm der Matrix und führt damit zur Interpretation von c).

Wegen $A \geq 0$ ist die Bedingung c) genau dann in der L_1- bzw. $L_\infty-\mathrm{Norm}$ erfüllt, wenn alle Spalten- bzw. Zeilennormen kleiner als 1 sind, d. h. A erfüllt die Brauer-Solow-Bedingung.

[Vgl. Nikaido, Hukukane: Convex Structures and Economic Theory, New York-London 1968,

S. 94, Solow, Robert: On the Structure of Linear Models. In: Econometrica 20 (1952), S. 27-46,

Woodbury, Max A.: Properties of Leontief-Type Input-Output Matrices. In: Morgenstern, O. (Hrsg.): Economic Activity Analysis, New York-London 1954, S. 341-363].

Mit Hilfe einer Betrachtung unzerlegbarer Matrizen lässt sich die Bauer-Solow-Bedingung etwas abschwächen.

[Vgl. dazu: Solow, Robert: On the Structure of Linear Models. In: Econometrica 20(1952), S. 29-46].

Ist Bedingung c) in der $L_\infty - \mathrm{Norm}$ erfüllt, d.h. gilt

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| < 1,$$

so folgt

$$A \cdot (1,1,\ldots 1)^T = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}, \sum_{j=1}^n a_{2j}, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{nj},\right)^T < (1,1,\ldots 1)^T .$$

Um von jedem Produkt eine Einheit auszubringen, muss also weniger als eine Einheit jedes Produktes eingesetzt werden.

Die Matrix $(E - A)$ kann durchaus eine $M -$ Matrix sein, obwohl $\|A\|_\infty \geq 1$. S. 1. 5. garantiert in diesem Fall jedoch die Existenz einer (anderen) Norm mit $\|A\| < 1$.

Explizit können wir diese Norm folgendermaßen erhalten:

$$\exists x: \; x \geq (E - A)x > 0, \qquad (\because \text{ S. 1. 2. b)}$$

also

$$x_i \geq \sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - a_{ij}) x_j > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\frac{1}{x_i} \cdot \sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - a_{ij}) x_j > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (\because x_i > 0)$$

$$0 < \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_j - \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

$$= 1 - \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij} \cdot x_j}{x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1.\ 9.)$$

Die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & . & . & . & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & . & . & . & x_n \end{pmatrix}$$

ist wegen $x_i > 0, \; i = 1, 2, \ldots, n$, nichtsingulär, und es gilt

$$\left(\frac{a_{ij}x_j}{x_i}\right)_{i,j=1,2,\ldots,n} = P^{-1}AP.$$

Aus (1. 9.) folgt dann

$$\left\|P^{-1}AP\right\|_{\infty} < 1.$$

Wegen (1. 9.) haben wir damit eine Norm mit der gewünschten Eigenschaft gefunden.

Bei jeder $M-\mathrm{Matrix}$ können wir also eine Transformation angeben, dass die Zeilennormen positiv werden. Die transformierte Matrix $A^{-1}\left(E-A\right)P$ ist wieder eine $M-\mathrm{Matrix}$, denn die Ähnlichkeitstransformation ändert die Eigenwerte nicht. Dieser Transformationsprozess bedeutet aber nichts anderes als die Wahl neuer Maßeinheiten für die Produkte.

Auch für die Aussagen d) und e) aus S. 1. 5.kann man eine anschauliche ökonomische Interpretation angeben. Dazu erinnern wir uns daran, dass der Koeffizient $a_{ij},\ i,\ j=1,2,\ldots,n,$ angibt, wie viele Einheiten des Produktes i zur Herstellung einer Einheit des Produktes j verwendet werden. Zur Herstellung des Produktes j werden aber unter Umständen noch andere von i verschiedenen Produkten benötigt, zu deren Produktion wiederum auf direktem oder indirektem Wege das Produkt i gebraucht wird.

Allgemein gibt

$$a_{ij}^{(p+1)} := \sum_{i_1=1}^{\cdot}\ldots\sum_{i_p=1}^{n} a_{i,i_1}\cdot a_{i_1,i_2}\ldots a_{i_p j},\quad p\geq 1$$

die Anzahl der Einheiten des Produktes i an, die über p Stufen zur Herstellung einer Einheit des Produktes j benötigt werden.

Wegen

$$A^p = (a_{ij}^p)$$

haben wir damit eine Interpretation der Potenzen der Matrix A gewonnen. Bedingung d) besagt somit, dass der indirekte Einfluss eines Produktes auf ein anderes mit wachsender Anzahl der Produktionsstufen gegen Null geht. Dies folgt natürlich auch aus der Konvergenz der Neumannschen Reihe.

Aussage e) gibt uns ein Berechnungsverfahren für die Inverse von $(E-A)$. Genauso gut kann man aber auch mittels

$$\begin{aligned} x &= (E-A)^{-1}y \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} A^i y \\ &= y + Ay + A^2y + \ldots \end{aligned}$$

das Iterationsverfahren

$$\begin{cases} x^{(0)} := y \\ x^{(i+1)} := y + Ax^i, \quad i \geq 0 \end{cases}$$

ansetzen, das die Partialsummen $\sum_{i=0}^{\infty} A^i y$ berechnet und gegen den Produktionsvektor x konvergiert.

Dieses Verfahren können wir folgendermaßen interpretieren:

Zunächst stellt man die geforderte Endnachfrage y her. Die Ausbringung von y erfordert aber Ay als Einsatz. Um Ay zu produzieren, benötigt man wiederum $A(Ay)$ als Einsatz, usw. Als Summe erhält man schließlich das gesuchte x.

D. 1. 3.

Eine Abbildung

$$f : D \subset R^n \to R^n$$

heißt *kontrahierend* auf $D_0 \subset D$, wenn

$$\exists \text{ ein } \lambda \in [0,\ 1[: \ \| f(x^1) - f(x^2) \| \ \leq \lambda \| x^1 - x^2 \|, \ \forall x^1, x^2 \in D_0.$$

Die Zahl $\lambda \in R^1$ heißt dann *Kontraktionskonstante*.

B. 1. 6.

Wir nennen eine kontrahierende Abbildung auch kurz *Kontraktion*. Die Kontraktionseigenschaft ist normabhängig; eine Abbildung kann in einer Norm kontrahierend sein, in einer anderen aber nicht.

Weiter sieht man sofort, dass eine Kontraktion stetig ist.

S. 1. 6.

Sei $A \in M(n,n): \text{ reell}; \quad A \geq 0.$ Dann gilt:

$$\left\langle (E - M) \in M_M \right\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{Die lineare Abbildung } A : R_+^n \to R_+^n \\ \text{ist auf } R_+^n \text{ kontrahierend.} \end{array} \right\rangle.$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“ :

Sei $(E - M) \in M_M$. Dann existiert nach S. 1. 5. c. eine Norm mit $\|A\| < 1$.

Wegen

$$\|Ax^1 - Ax^2\| = \|A(x^1 - x^2)\|$$

$$\le \|A\| \cdot \|x^1 - x^2\|, \qquad \forall x^1, x^2 \in R^2$$

ist A kontrahierend auf $R_+^n \subset R^n$ mit der Kontraktionskonstante $\lambda := \|A\| < 1$.

„$\Leftarrow$ “:

Sei die lineare Abbildung $A: R^n \to R^n$ kontrahierend auf R_+^n. Es gelte also

$$\|Ax^1 - Ax^2\| \le \lambda \cdot \|x^1 - x^2\|, \qquad \forall x^1, x^2 \in R_+^n \wedge \text{ ein } \lambda < 1.$$

Für jedes $x \in R^n$ seien die Vektoren $x^+, x^- \in R_+^n$ durch

$$x_i^+ := \begin{cases} x_i & \text{falls} \quad x_i \ge 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x_i < 0 \end{cases}, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$x_i^- := \begin{cases} -x_i & \text{falls} \quad x_i \le 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x_i > 0 \end{cases}, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

definiert. Offensichtlich gilt für alle $x \in R^n$

$$x = x^+ - x^n.$$

Damit folgt für alle $x \in R^n$:

$$\|Ax\| = \|A(x^+ - x^-)\|$$
$$= \|Ax^+ - Ax^-\|$$
$$\le \lambda \|x^+ - x^-\|$$
$$= \lambda \|x\|,$$

da $x^+, x^- \in R_+^n$ sind.

Mit dieser Abschätzung ergibt sich:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$
$$\le \sup_{\|x\|=1} \lambda \|x\|$$
$$= \lambda$$
$$< 1.$$

Nach S. 1. 5. a) gilt dann $(E - A) \in M_M$. *q. e. d.*

D. 1. 4. (*Dual*)

Folgendes Problem wird als *dual* zu (P. 1. 1'.) bezeichnet:

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i + v_j, \quad j = 1, 2, ..., n. \qquad \text{(P. 1. 1.'. d.)}$$

Hier sind:

p_j : „Preis" des Sektors $j = 1, 2, ..., n,$

v_j : das bedingte Nettoprodukt des Sektors $j = 1, 2, ..., n$.

Mit

$$(p_j) =: p \in R_+^n$$

$$(v_j) =: v \in R_+^n$$

lässt sich (P. 1. 1.'. d.) in Matrizenschreibweise in folgender Form darstellen:

$$p = A^T p + v. \qquad \text{(P.1. 1. d.)}$$

B. 1. 7.

Für das Problem (P. 7. 1. d.) (bzw. (P. 1. 1'. d.)) lassen sich ähnlich wie in S. 1. 2. und S. 1. 5. Äquivalenzaussagen beweisen. Es lässt sich ferner zeigen, dass die Lösbarkeit (Funktionsfähigkeit: *„workability")* des Modells (P. 1. 1.) (bz*w.* (P. 2. 1'.)) äquivalent der Lösbarkeit (Produktivität: *„profitability"*) des Modells (P. 1. 1. d.) (bzw. (P. 1. 1'. d.)) ist.

B. 1. 8.

Das Problem (P. 1. 1'.) ist ein Spezialfall des Gleichungssystems

$$\rho x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \qquad \text{(P. 1. 2'.)}$$

wobei $\rho \in R^1$ ein Parameter ist.

Das dazu duale Problem lautet:

$$\rho p_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i + v_j, \quad j = 1, 2, ..., n. \qquad \text{(P. 1. 2'. d.)}$$

Die in S. 1. 2. und S. 1. 5. enthaltenen Äquivalenzaussagen lassen ich entsprechend verallgemeinern. Dies gilt auch für die Bauer-Solow- Bedingung [Vgl. Nikaido, Hukukane: Convex Structures and Economic Theory. New York-London 1968, S. 87-108].

II

Nichtlineare Input-Output-Modelle

D. 2. 1.

Unter dem *statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodell mit nichtlinearen Aufwandsfunktionen* verstehen wir:

$$x_i = b_i(x) + y_i,\ i = 1, 2, ..., n \qquad \text{(P. 2. 1.)}$$

bzw.

$$x = b(x) + y. \qquad \text{(P. 2. 1'.)}$$

Hier sind:

x_i : die Gesamtproduktion des Sektors $i = 1, 2, ..., n,$

$(x_i) =: x \in R_n^+$,

y_i : die Endnachfrage des Sektors $i = 1, 2, ..., n,$

$(y_i) =: y \in R_n^+$,

$b_i(x)$: die Aufwandsfunktion des Sektors $i = 1, 2, ..., n,$

$(b_i(x)) =: (b(x)) \in R_+^n.$

B. 2. 1.

Das Modell (P. 2. 1.) bzw. (B. 2. 1'.) ist sehr allgemein und lässt in dieser Form kaum qualitative und quantitative Aussagen zu. Es wird im Weiteren in verschiedene Richtungen spezialisiert.

Es werden insbesondere an die Aufwandsfunktion

$$b:\ R_+^n \to R_+^n \qquad \text{(2. 1.)}$$

verschiedene Forderungen gestellt und entsprechende Modellansätze und Lösbarkeitsbedingungen erörtert.

D. 2. 2.

Das Problem (P. 2. 1.) bzw. (P. 2. 1'.) heißt *global* (bzw. *stark*) *lösbar*, wenn für jedes beliebige, nach Wahl aber fixierte $y \in R_+^n$ ein $x \in R_+^n$ existiert, derart dass (P. 2. 1.) bzw. (P. 2. 1'.)) erfüllt ist.

D. 2. 3.

Das Problem (P. 2. 1.) bzw. (P. 2. 1'.) heißt *lokal* (bzw. *schwach*) *lösbar*, wenn für ein $y \in R_+^n$ ein $x \in R_+^n$ existiert, derart dass (P. 2. 1.) (bzw. (P. 2. 1'.)) erfüllt ist.

B. 2. 2.

Ersetzt man in D. 2. 2. bzw. D. 2. 3. überall $x \in R_+^n$ durch $R_+^n \setminus \{0\}$, dann spricht man von *streng globaler* bzw. *streng lokaler Lösbarkeit*.

B. 2. 3.

D. 2. 2. – D. 2. 3. verallgemeinern die Aussagen b) – c) in S. 1. 2.

B. 2. 4.

Die Aufwandsfunktion (2. 1.) heißt *additiv*, wenn gilt:

$$b: R_+^n \to R_+^n,$$

$$b_i(x) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x), \quad i = 1, 2, ..., n, \qquad \text{(B. 1.)}$$

$$b_i: R_+^n \to R_+^1 \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

$$b_{ij}: R_+^n \to R_+^1 \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Ein wichtiger Spezialfall von (B. 1.) ist

$$b_i(x) := \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x_i, x_j), \qquad i = 1, 2, ..., n. \qquad \text{(B. 2.)}$$

Die Aufwandsfunktion (B. 1.) heißt *additiv separierbar*, wenn gilt

$$b_i(x) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

$$b_{ij}: R_+^1 \to R_+^1, \qquad i = 1, 2, ..., n. \qquad \text{(B. 3.)}$$

Mit (B. 4.) möge folgender Spezialfall von (B. 1.) bezeichnet sein:

$$b_{ij} = a_{ij}(x) \cdot x_j \qquad \text{(B. 4.)}$$

mit

$$a_{ij}(.) := \begin{cases} \dfrac{b_{ij}(x_1, ..., x_n)}{x_j}, & x_j > 0 \\ \lim\limits_{\bar{x}_j \to x_j} \dfrac{b_{ij}(x_1, ..., x_{j-1}, \bar{x}_j, x_{j+1}, ..., x_n)}{\bar{x}_j} & x_j = 0 \end{cases}, \qquad i, j = 1, 2, ..., n$$

wobei die Existenz des obigen Grenzwertes für alle $i,\ j = 1, 2, ..., n$ vorausgesetzt wird.

Die Funktionen $a_{ij}(.),\ i,\ j = 1, 2, ..., n,$ werden als *Funktionen des direkten Materialaufwands* (pro Produkteinheit) bezeichnet.

Im Fall von

$$a_{ij} = k_{ij} = const, \quad i,\ j = 1, 2, ..., n, \tag{2. 2.}$$

hat man mit homogen-linearen Aufwandsfunktionen

$$b_{ij} = a_{ij} x_j, \quad i,\ j = 1, 2, ..., n, \tag{B. 5.}$$

zu tun [vgl. Kapitel I].

B. 2. 5.

Ein allgemeinerer Fall ist die inhomogen-lineare Funktion

$$b_{ij} = a_{ij} x_j + a_{ij}^*, \quad a_{ij}^* > 0, \quad i,\ j = 1, 2, ..., n. \tag{B. 6.}$$

Diese Funktion bringt zum Ausdruck, dass im Sektor $j = 1, 2, ..., n$ auch dann Aufwendungen entstehen, wenn nicht produziert wird. Es kann sich zum Beispiel um Aufwendungen handeln, die mit vorliegender Instandsetzung der Ausrüstungen verbunden sind.

Ein bedeutender Mangel der homogen-linearen Aufwandsfunktionen besteht in der Annahme der Unabhängigkeit der Koeffizienten des direkten Aufwands

$$a_{ij} = k_{ij} = const, \quad i,\ j = 1, 2, ..., n,$$

vom Produktionsvolumen $x_j,\ j = 1, 2, ..., n.$ Diese Unzulänglichkeit wird natürlich teilweise bei der Anwendung von inhomogen-linearen Aufwandsfunktionen umgangen. In diesem Fall ist es möglich, Aufwandsersparnisse auf Grund eines höheren Nutzungsgrades der Produktionskapazität zu berücksichtigen.

Im Folgenden wird ein anderer Zugang zu inhomogen-linearen Funktionen erörtert:

Gegeben sei das Problem

$$x - a^* - Ax - \bar{b}(x) = y \tag{P. 2. 2.}$$

mit

$$x := (x_i) \in R_+^n,$$

$$a^* := (a_i^*) \in R^n,$$

$$A := (a_{ij}):\ R_n^+ \to R_n^+,$$

$$\bar{b}(x) := (\bar{b}(x)) \in R^n.$$

Hierbei soll $\bar{b} : R^n \to R^n$ der nichtlineare Teil der Aufwandsfunktion $b(x)$ sein.

Für

$$\bar{b}(x) \equiv 0 \quad \text{und} \quad a^* \neq 0$$

hat man nun mit einem statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodell mit inhomogen-linearen Aufwandsfunktionen zu tun. Es gilt also:

$$b_{ij}(x_j) = a_{ij}^* + a_{ij}x_j, \quad a_{ij}^* > 0; \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Es gilt nun

$$\frac{a_{ij}^* + a_{ij}x_j}{x_j} = \frac{a_{ij}^*}{x_j} + a_{ij} =: a_{ij}^*(x_j), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2.\ 3.)$$

Der Koeffizient des direkten Materialaufwands ist in (2. 3.) nichtlinear, d. h. das statische volkswirtschaftliche Verflechtungsmodell mit inhomogen-linearen Aufwandsfunktionen ist nichtlinear bezüglich der Koeffizienten des direkten Materialaufwands. Dieser Fall ist besonders günstig, da in einer Reihe von Fällen die nichtlinearen Aufwandsfunktionen durch inhomogen-lineare Funktionen approximiert werden.

Ein Vorzug der inhomogen-linearen Aufwandsfunktionen besteht darin, dass die Lösbarkeit des entsprechenden Modells auf die Lösbarkeit des zugehörigen Modells mit homogen-linearen Aufwandsfunktionen zurückgeführt werden kann. Es gilt nämlich:

$$x = (E - A)^{-1}(y + a^*). \qquad (2.\ 4.)$$

Aus (2. 4.) resultiert ein anderer Vorteil des Modells mit inhomogen-linearen Aufwandsfunktionen:

Hat man die Inverse $(E - A)^{-1}$, so kann man das lineare Gleichungssystem

$$x - Ax = y + a^*$$

im Rahmen der Änderungsproblematik behandeln.

Verfahren I

Zur Lösung des Problems (P. 2. 1'.) sei folgendes Iterationsverfahren (*das Verfahren der sukzessiven Approximation I – VSA I*) vorgeschlagen:

$$\begin{cases} i) & x^0 := y \\ ii) & x^{(\nu)} := b(x^{(\nu-1)}) + y, \quad \nu \in N \end{cases}$$

S. 2. 1.

$$\left\langle b(x^2) \geq b(x^1),\ \forall x^2, x^1 \in R_+^n : x^2 \geq x^1 \geq 0 \right\rangle \qquad (B.\ 7.)$$

$$\Rightarrow$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \{x^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}:\ \text{VSA I} \\ x^{(\nu+1)} \geq x^{(\nu)} \geq 0,\ \nu \in N \cup \{0\} \end{array} \right\rangle.$$

Beweis:

Es gilt

$$x^{(1)} = b(x^{(0)}) + x^{(0)} \qquad (\because \text{ VSA I (i)})$$

$$\geq x^{(0)} \qquad (\because\ b(x) \in R_+^n)$$

Es gelte die Induktionshypothese

$$x^{(\nu)} \geq x^{(\nu-1)} \geq 0\,. \tag{2. 5.}$$

Es gilt dann:

$$x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)} = b(x^{(\nu)}) - b(x^{(\nu-1)}) \qquad (\because \text{ VSA I })$$

$$\geq 0, \qquad (\because \text{ (B. 7.), (2. 5.) })$$

d.h.

$$x^{(\nu+1)} \geq x^{(\nu)} \geq 0, \quad \nu \in N \cup \{0\}.$$ *q. e. d.*

B. 2. 6.

Laut Bedingung (B. 7.) wird die Aufwandsfunktion $b:\ R_+^n \to R_+^n$ *isoton* vorausgesetzt. Dies bedeutet ökonomisch, dass mit nichtfallender Gesamtproduktion keine der erforderlichen Aufwendungen absolut abnimmt.

Im Falle

$$b:\ R_+^n \to R_+^n$$

$$b(x^2) \leq b(x^1), \quad \forall x^2, x^1 \in R_+^n : x^2 \geq x^1 \geq 0,$$

wäre die Aufwandsfunktion *antiton.*

Es sei bemerkt, dass sowohl Isotonie als auch Antitonie das Konstantenbleiben der Aufwandsfunktion einschließen und dass eine nichtisotone Aufwandsfunktion nicht notwendig antiton ist. Antitone Aufwandsfunktionen wird man in der Realität wohl kaum antreffen. In der Volkswirtschaft scheint die Isotonieannahme der Aufwandsfunktion durchaus dem Normalfall entsprechen; dagegen ist diese Annahme in der Betriebswirtschaft nicht immer gerechtfertigt. Diese Problematik wird später detaillierter untersucht.

S. 2. 2.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1′.) mit (B. 7.). Es gelte ferner

$$\lim_{\nu\to\infty} b(x^{(\nu)}) = b(\lim_{\nu\to\infty}(x^{(\nu)})). \tag{B. 8.}$$

Dann gilt:

$$\left\langle \{x^{(\nu)},\ \nu \in N \cup \{0\}:\ \text{VSA I ist konvergent.} \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left\langle \text{(P. 2. 1'.) ist global lösbar und } x^* = \lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)} \text{ ist e i n e Lösung von (P. 2. 1'.)} \right\rangle.$$

Beweis:

($\Rightarrow$) Sei $x^* := \lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)}$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)} &= b(x^{(\nu)}) + y - x^{(\nu)} \\ &= b(x^{(\nu)}) + y - x^{(\nu)} + b(x^{(\nu)}) - b(x^{(\nu)}) \\ &= y - f(x^{(\nu)}). \qquad \text{(mit } x^{(\nu)} - b(x^{(\nu)}) := f(x^{(\nu)})\text{)} \end{aligned} \tag{2. 6.}$$

Da die Folge $\{x^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$, konvergiert, folgt:

$$\lim_{\nu\to\infty}(x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}) = 0.$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\nu\to\infty}(x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}) \\ &= \lim_{\nu\to\infty}(y - f(x^{(\nu)})) && (\because \text{(2. 6.)}) \\ &= y - \lim_{\nu\to\infty} f(x^{(\nu)}) \\ &= y - \lim_{\nu\to\infty}(x^{(\nu)} - b(x^{(\nu)})) \\ &= y - (x^* - \lim_{\nu\to\infty} b(x^{(\nu)})) \\ &= y - (x^* - b(\lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)})) && (\because \text{(B. 8.)}) \\ &= y - (x^* - b(x^*)) \\ &= y - f(x^*). \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Induktion:

Sei x^* eine Lösung von (P. 2. 1'.):

$$x^* = b(x^*) + y\,. \qquad (2.\ 7.)$$

Dann gilt

$$x^* \geq y \qquad (2.\ 8.)$$

und

$$x^{(1)} = b(y) + y \qquad (\because \text{(VSA I(i))}$$

$$\leq b(x^*) + y \qquad (\because \text{ (2. 8.), (B. 7.))}$$

$$= x^*. \qquad (\because \text{ (2. 7.))}$$

Es gelte die Induktionshypothese

$$x^{(\nu)} \leq x^*. \qquad (2.\ 9.)$$

Dann erhält man:

$$x^{(\nu+1)} = b(x^{(\nu)}) + y \qquad (\because \text{(VSA I(ii))}$$

$$\leq b(x^{(\nu)}) + y \qquad (\because \text{ (2. 9.), (B. 7.))}$$

$$= x^* \qquad (\because \text{ (B. 7.))} \qquad (2.\ 10.)$$

Damit ist $\{x^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$, beschränkt und monoton ($\because$ (B. 7.); sie ist also konvergent. Ihr Grenzwert löst nach Konstruktion das Problem (P. 2. 1'.) *q. e. d.*

<u>S. 2. 3.</u>

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.). Es gelten die Bedingungen (B. 7.) und (B. 8.).

$$\left\langle \text{(P. 2. 1'.) hat eine mehrdeutige Lösung für ein festes } y \in R_+^n \right\rangle$$

$$\Rightarrow$$

$$\left\langle \lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)} := x^* \leq \bar{x} \quad ; \ \bar{x}: \text{ eine beliebige Lösung für dieses feste } y \in R_+^n \right\rangle.$$

Beweis:

Es gilt:

$$\bar{x} = b(\bar{x}) + y \qquad (2.\ 11.)$$

$$\geq y. \qquad (2.\ 12.)$$

Wir zeigen nun, dass $\bar{x}$ eine obere Schranke der nach (VSA I) definierten Folge $\{x^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$, ist (Induktion):

Es gilt

$$x^{(1)} = b(y) + y$$

$$\leq b(\bar{x}) + y \quad (\because (2.\ 12), (B.\ 7.))$$

$$= \bar{x}. \quad (\because (2.\ 11))$$

Es gelte die Induktionshypothese

$$x^{(\nu)} \leq \bar{x}. \quad (2.\ 13.)$$

Dann gilt:

$$x^{(\nu+1)} = b(x^{(\nu)}) + y \quad (2.\ 14.)$$

$$\leq b(\bar{x}) + y \quad (\because (2.\ 13), (B.\ 7.))$$

$$= \bar{x}. \quad (\because (2.\ 11))$$

Es gilt ferner

$$\lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)} \leq \lim_{\nu\to\infty} \bar{x} \quad (\because (2.\ 14))$$

$$= \bar{x}, \quad (\because (S.\ 2.\ 2.))$$

d.h. $x^* \leq \bar{x}$. q. *e. d.*

B. 2. 7.

Nach S. 2. 7. liefert das Verfahren VSA I im gewissen Sinne die „beste Lösung“ des Problems (P. 2. 1'.), da die Endnachfrage y mit der geringsten Gesamtproduktion x realisiert wird.

Zum Beispiel lösen sowohl $x^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T$ als auch $x^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^T$ die in Bemerkung B. 2. 14 angeführte Aufgabe. Eine Anwendung des Verfahrens VSA I würde jedoch stets zur Lösung x^2 führen.

Ein anderer Zugang zur Theorie der Minimaleigenschaft eines statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodells mit nichtlinearen Aufwandsfunktionen wird in einem selbstständigen Kapitel diskutiert.

B. 2. 8.

Das Verfahren VSA kann auch mit $x^{(0)} = 0$ bzw. $x^{(0)} := x^+ \in R^n_+$ mit $f(x^+) \geq y$ gestartet werden. Für den Nachweis der Konvergenz benötigt man allerdings die zusätzliche Voraussetzung

$$\exists \text{ ein } x^+ \in R^n_+ : f(x^+) \geq y. \quad (2.\ 15.)$$

Diese Annahme wäre auch für S. 2. 3. erforderlich. Die Einzelheiten werden im Kapitel III erörtert.

S. 2. 4.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) mit (B. 7.) und (B. 8.).

Dann gilt:

$$\left\langle \text{(P. 2. 1'.) ist lösbar für e i n } \tilde{y} \in R_+^n \right\rangle \Rightarrow \left\langle \text{(P. 2. 1'.) ist lösbar für a l l e } y \in [0, \tilde{y}] \right\rangle$$

Beweis

Sei $\{x^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$ bzw. $\{\tilde{x}^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$ zwei nach VSA I erzeugte Folgen mit $x^{(0)} := y$ bzw. $\tilde{x}^{(0)} := \tilde{y}$. Aus S. 2. 1. folgt, dass beide Folgen nicht fallend sind. Wegen $y \leq \tilde{y}$ und (B. 7.) lässt sich ferner zeigen, dass

$$x^{(\nu)} \leq \tilde{x}^{(\nu)},\ \nu \in N \cup \{0\}$$

gilt. Aus S. 2. 2. ist bekannt, dass $\{\tilde{x}^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$, nach oben beschränkt ist. Hieraus folgt die Behauptung. *q. e. d.*

S. 2. 5.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.). Es gelte (B. 7.), (B. 8.) und

$$b(\lambda x) \leq \lambda b(x),\ \forall \lambda > 1;\ \forall x \in R_+^n. \qquad \text{(B. 9.)}$$

Dann gilt

$$(\text{(P. 2. 1'.) ist lösbar für e i n } y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\}) \Rightarrow (\text{(P. 2. 1'.) ist lösbar für a l l e } y \in R_+^n).$$

Beweis:

Es sei $\{\tilde{x}^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$ eine durch (VSA I) definierte Folge für $y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\}$. Ferner sei $\{\bar{x}^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$, eine durch VERF. I definierte Folge für $y = \bar{y} := \lambda \tilde{y}$ für ein $\lambda > 1$. Wegen S. 2. 1. sind beide Folgen monoton wachsend, und die Folge $\{\tilde{x}^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$ ist konvergent (da (P. 2. 1'.) für $\tilde{y}$ lösbar angenommen wird und wegen S. 2. 1.).

Sei

$$\bar{x}^{(\nu)} \leq \lambda \tilde{x}^{(\nu)}, \text{ für ein } \nu \in N \cup \{0\}. \tag{2. 15.}$$

Dann gilt

$$\bar{x}^{(\nu)} = b(\bar{x}^{(\nu-1)}) + \lambda \tilde{y}$$

$$\leq b(\lambda \tilde{x}^{(\nu-1)}) + \lambda \tilde{y} \qquad (\because \text{ (2. 15.), (B. 7.)})$$

$$\leq \lambda(b(\tilde{x}^{(\nu-1)}) + \tilde{y}) \qquad (\because \text{ (2. 9)})$$

$$= \lambda \tilde{x}^{(\nu)}.$$

Damit ist die Folge $\{\bar{x}^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$, auch beschränkt und wegen Monotonie konvergent. Es existiert also eine Lösung des Problems (P. 2. 1`.) für $y = \lambda \tilde{y}$, falls das Problem für $y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\}$ lösbar ist. Die Aussage des Satzes folgt aus S. 2. 4. und der Tatsache, dass λ beliebig groß gewählt werden kann. *q. e. d.*

B. 2. 9.

Die Bedingung (B. 9.) bedeutet ökonomisch: Erhöht man die Gesamtproduktion, so erhöht sich der damit verbundene Aufwand höchstens genauso schnell.

S. 2. 6.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.). Es gelte (B. 7.), (B. 8.) und (B. 9.). Dann gilt:

$$[\text{(P. 2. 1'.) ist lösbar für ein } y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\}]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$[\text{(P. 2. 1'.) ist eindeutig lösbar für alle } y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\}].$$

Beweis:

Sei $\tilde{x}$ eine Lösung des Problems (P.1. 2.'), die als Grenzwert der durch VSA I definierte Folge $\{\bar{x}^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$, mit $x^{(0)} := \tilde{y}$ gewonnen wurde. x^* möge eine weitere beliebige Lösung dieses Problems sein. Wegen S. 2. 3. gilt

$$\tilde{x} \leq x^*. \tag{2. 16.}$$

Sei ferner

$$\lambda \in R^1: \ \min(\lambda \tilde{x}_i - x_i^*) = 0.$$

damit gilt

$$\lambda \tilde{x}_i - x_i^* \geq 0,$$

und wegen (2. 16.): Entweder ist $\lambda = 1$, womit die Behauptung des Satzes als bewiesen gilt oder ist $\lambda > 1$.

Wir betrachten den letzten Fall:

Da $\tilde{x}$ und x^* Lösungen des Problems (P. 2. 1'.) sind, hat man:

$$\begin{aligned} \lambda \tilde{x} - x^* &= \lambda b(\tilde{x}) - b(x^*) + (\lambda - 1) y \\ &\geq b(\lambda \tilde{x}) - b(x^*) + (\lambda - 1) y && (\because \text{(B. 9.)}) \\ &\geq (\lambda - 1) y && (\because (\lambda \tilde{x} \geq x^*), \text{(B. 7.)}) \\ &> 0. && (\because (y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\}), \lambda \in R^1 \setminus \{0\}) \end{aligned}$$

da aber der Vektor $\lambda \tilde{x} - x^*$ mindestens eine Nullkomponente hat, ist dies ein Widerspruch. Folglich ist $\lambda = 1$ und $\tilde{x} = x^*$. q. *e. d.*

B. 2. 10.

Die Lösung des Gleichungssystems (P. 2. 1'.) ist gleichbedeutend mit der Bestimmung der Fixpunkte der Abbildung

$$b_y :\equiv b + y : \ R_+^n \to R_+^n,$$

also aller $x^* \in R_+^n$ mit

$$\begin{aligned} x^* &= b_y(x^*) \\ &= b(x^*) + y. \end{aligned}$$

B. 2. 11.

Im Folgenden werden die mathematischen Aussagen zunächst in voller Allgemeinheit gemacht, d.h. spezielle Eigenschaften des Problems (P. 2. 1'.) werden nur dann vorausgesetzt, wenn sie wirklich gebraucht werden.

S. 2. 7. (***Kontraktionssatz***)

Gegeben sei die auf der angeschlossenen Teilmenge $D_0 \subset D$ kontrahierende Abbildung [Vgl. D. 1. 3.]

$$g : D \subset R^n \to R^n.$$

Es gelte ferner

$$g(D_0) \subset D_0.$$

Dann hat g einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $x^* \in D_0$.

Die Folge

$$x^{(\nu)} = g(x^{(\nu-1)}), \quad \nu \in N \tag{2. 17.}$$

konvergiert für jedes $x^0 \in D_0$ gegen x^*.

Beweis:

Existenz:

Wegen $g(D_0) \subset D_0$ ist die Folge (2. 17.) wohl definiert und bleibt in D_0 . Es gilt:

$$\begin{aligned}\left\|x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}\right\| &= \left\|g(x^{(\nu)}) - g(x^{(\nu-1)})\right\| \\ &\leq \lambda \left\|x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}\right\|.\end{aligned}$$

Damit folgt für $\vartheta \geq 1$:

$$\begin{aligned}\left\|x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}\right\| &\leq \sum_{\mu=1}^{\vartheta} \left\|x^{(\nu+\mu)} - x^{(\nu+\mu-1)}\right\| \\ &\leq (\lambda^{\vartheta-1} - 1 + \ldots + 1)\left\|x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}\right\| \\ &\leq \frac{1}{1-\lambda}\left\|x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}\right\| \\ &\leq \frac{\lambda^{\nu}}{1-\lambda}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|.\end{aligned}$$

$\left\{x^{(\nu)}\right\}, \ \nu \in N$, ist also eine Cauchyfolge und hat daher wegen der Abgeschlossenheit von D_0 einen Grenzwert x^* in D_0 .

Es bleibt zu zeigen, dass x^* Fixpunkt von g ist. Das folgt aber aus:

$$\begin{aligned}0 &\leq \left\|x^* - g(x^*)\right\| \\ &\leq \left\|x^* - x^{(\nu)}\right\| + \left\|x^{(\nu)} - g(x^*)\right\| \\ &= \left\|x^* - x^{(\nu)}\right\| + \left\|g(x^{(\nu-1)}) - g(x^*)\right\| \\ &\leq \left\|x^* - x^{(\nu)}\right\| + \lambda\left\|x^{(\nu-1)} - x^*\right\|,\end{aligned}$$

weil die rechte Seite für $\nu \to \infty$ gegen Null strebt.

Eindeutigkeit:

Ist

$$g(x^1) = x^1, \quad g(x^2) = x^2 \text{ mit } \quad x^1 \neq x^2,$$

so folgt:

$$\left\| x^1 - x^2 \right\| = \left\| g(x^1) - g(x^2) \right\|$$

$$\leq \lambda \left\| x^1 - x^2 \right\|$$

$$< \left\| x^1 - x^2 \right\|.$$

Dies ist ein Widerspruch. Es folgt $x^1 = x^2$. *q. e. d.*

S. 2. 8.

Es gilt:

$$\left\langle \exists \text{ ein } \lambda \in [0,\ 1[: \| b(x^2) - b(x^1) \| \leq \lambda \| x^2 - x^1 \|, \forall x^1, x^2 \in R_+^n \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow \qquad \text{(B. 10.)}$$

$$\left\langle \text{(P. 2. 1'.) ist eindeutig global lösbar} \right\rangle$$

Beweis:

Der Beweis folgt aus S. 2. 7. unter Berücksichtigung folgender Tatsachen:

1. $b_y :\equiv b + y,\ R_+^n \to R_+^n$ ersetzt die Abbildung g.
2. b_y ist trivialerweise genau dann kontrahierend, wenn b es ist [Vgl. (B. 10.)].
3. Aus $D = R_+^n$ folgt für jedes $x \in R_+^n$ auch $b_y = b(x) + y \in R_+^n$. Damit ist in diesem Fall die Bedingung $b_y(R_+^n) \subset R_+^n$ von vornherein erfüllt. *q. e. d.*

B. 2. 12.

(B. 10.) ist als Voraussetzung ziemlich schwach, denn kontrahierende Abbildungen sind zwar stetig, aber nicht notwendig (additiv) separierbar oder isoton, geschweige denn differenzierbar. Im Kapitel III geben wir Bedingungen an, aus denen folgt, dass eine Abbildung kontrahierend ist. Dort werden auch weitere Eigenschaften der Folge (2. 17.) untersucht.

S. 2. 9.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) mit (B. 4.), (B. 7.) und (B. 8.), d. h.

$$x = A(x)x + y \qquad \text{(P. 2. 3.)}$$

mit

$$A(x) := (a_{ij}(x)) \in M(n,n).$$

Es gilt:

$$\lambda(A(x)) < 1, \ \forall x \in R_+^n : \ x > A(x)x.$$

Beweis:

Sei ein beliebiges $x \in R_+^n$ mit

$$x > A(x)x \tag{2. 18.}$$

gegeben.. Wir nehmen an, dass

$$\lambda(A) \geq 1$$

gilt. Dies bedeutet:

$$\exists \text{ kein } \tilde{x} \in R_+^n : \ \tilde{x} > A(\tilde{x})\tilde{x},$$

in Widerspruch zu (2. 18.). Daher die Behauptung. *q. e. d.*

B. 2. 13.

Die Behauptung von S. 2. 9. gilt auch für alle $x \in R_+^n$ mit $x = A(x)x$, falls $A(x)$ für alle $x \in R_+^n$ nichtzerlegbar ist.

S. 2. 10.

Es existiere

$$\sup_{x \in R_+^n} a_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n) := \bar{a}_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, ..., n.$$

Dann gilt:

$$\left\langle \lambda(\bar{A}) < 1 \text{ mit } \bar{A} := (\bar{a}_{ij}) \in M(n,n) \right\rangle \tag{B. 11.}$$

$$\Rightarrow$$

$$\langle \text{(P. 2. 3) ist global lösbar.} \rangle$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} x^{(\nu)} &= A(x^{(\nu-1)})x^{(\nu-1)} + y && (\because \ \text{VSA I}) \\ &\leq A(x^{(\nu)})x^{(\nu)} + y && (\because \ \text{(B. 7.)}) \\ &\leq \bar{A}x^{(\nu)} + y, \\ x^{(\nu)} &\leq (E - A)^{-1} y. && (\because \ \text{(B. 11.)}) \end{aligned}$$

Damit ist $\{x^{(\nu)}\},\ \ \nu \in N \cup \{0\},$ nach oben beschränkt. Andererseits ist diese Folge nach S. 2. 1. monoton. Unter Berücksichtigung von S. 2. 2. folgt dann die Behauptung. *q. e. d.*

<u>B. 2. 14.</u>

Bedingung (B. 11.) garantiert die Existenz einer Lösung von (P. 2. 3.) für ein beliebiges $y \in R_+^n$, *nicht* jedoch deren Eindeutigkeit. Dies wird an einem *Gegenbeispiel* gezeigt:

Sei

$$a_{ij} := \begin{cases} x_j & \text{für} \quad x_j \le \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \text{für} \quad x_j > \dfrac{1}{3} \end{cases}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n, \qquad\qquad y := \left(1/9 \quad 1/9\right)^T .$$

Es gilt:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{\,} \end{pmatrix}, \qquad \lambda(\bar{A}) < 1 .$$

Aber sowohl

$$x^1 = \left(1/3 \quad 1/3\right)^T$$

als auch

$$x^1 = \left(1/6 \quad 1/6\right)^T$$

stellen Lösungen des Problems dar.

<u>S. 2. 11.</u>

Gegeben sei das Problem (P. 2. 3.) mit (B. 10.) und

$$A(x^2) \le A(x^1), \quad \forall x^2 \ge x^1 \ge 0. \qquad \text{(B. 12.)}$$

Dann ist (P. 2. 3.) eindeutig lösbar.

Beweis:

<u>Existenz</u>: Siehe S. 2. 10.

<u>Eindeutigkeit</u>: Das Problem habe die Lösungen

$$x^i,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

d.h., es gelte

$$x^i = A(x^i)x^i + y, \quad i = 1,2,...,m. \tag{2. 19.}$$

Es gilt dann

$$\exists \text{ ein } x^1 : \ x^1 \le x^i, \quad i = 1,1,...,m. \qquad (\because \ \text{S. 2. 2.}) \tag{2. 20.}$$

Ferner gilt für $i = 1,2,...,m$:

$$x^i - x^1 = A(x^i)x^i - A(x^1)x^1 \qquad (\because \ (2.\ 19.), (\text{VSA I}))$$

$$\le A(x^1)x^i - A(x^1)x^1 \qquad (\because \ (2.\ 20.), (\text{B. } 12.))$$

$$= A(x^1)(x^i - x^1)$$

$$\le \bar{A}(x^i - x^1)\,.$$

$$(E - \bar{A})(x^i - x^1) \le 0,$$

$$x^i - x^1 \le 0, \qquad (\because \ \text{B. } 11.) \tag{2. 21.}$$

$$x^i = x^1. \qquad (\because \ (2.\ 20), (2.\ 21.))$$

q. e. d.

B. 2. 15.

Bedingung (B. 12.) heißt ökonomisch, dass bei nicht abnehmender Gesamtproduktion sämtliche direkte Verbrauchsnormen nicht abnehmen.

S. 2. 12.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 3.) mit (B. 7.), (B. 8.) und

$$1^T A(x^2) \le 1^T A(x^1) < 1, \quad \forall x^2 \ge x^1 \ge 0, \tag{B. 13.}$$

wobei $1 := (1, \ \ . \ \ . \ \ . \ \ 1)^T$ ist.

Dann ist das Problem (P. 2. 3.) eindeutig global lösbar.

Beweis:

Es gilt

$$1^T(x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}) = 1^T y - 1^T(E - A(x^{(\nu-1)}))x^{(\nu-1)}. \qquad (\because \ \text{VSA I}) \tag{2. 22.}$$

Falls die linke Seite der Gleichung (2. 22.) gleich Null ist, gilt wegen (B. 7.) $x^{(\nu)} = x^{(\nu-1)}$, und damit existiert eine Lösung.

Ist die linke Seite der Gleichung (2. 22.) positiv, so hat man

$$1^T(E - A(x^{(\nu-1)}))x^{(\nu-1)} < 1^T y.$$

Es gilt jedoch wegen (B. 13.)

$$1^T(E - A(x^{(\nu-1)}))x^{(\nu-1)} > 0.$$

Damit ist $\{x^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$, für jedes feste y nach oben beschränkt. Dies zusammen mit der Monotonie der Folge $\{x^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$, macht sie auch konvergent.

Gemäß S. 2. 2. ist (P. 2. 3.) global lösbar.

Wir zeigen nun, dass die Lösung dieses Problems eindeutig ist:

Seien $\tilde{x}, x^*$ zwei Lösungen des Problems (P. 2. 3.), wobei $\tilde{x}$ als Grenzwert der durch VSA I definierten Folge gewonnen wurde. Dann gilt wegen S. 2. 3.

$$\tilde{x} \le x^*. \qquad (2.\ 23.)$$

Ferner hat man

$$1^T(x^* - \tilde{x}) = 1^T(A(x^*)x^* - A(\tilde{x})\tilde{x})$$

$$\le 1^T A(\tilde{x})(x^* - \tilde{x}), \qquad (\because\ (B.\ 13.))$$

$$1^T(E - A(\tilde{x}))(x^* - \tilde{x}) \le 0 \qquad (2.\ 24.)$$

Andererseits gilt

$$1^T(E - A(\tilde{x})) > 0 \qquad (\because\ (B.\ 13.))$$

und wegen (2. 24.)

$$x^* - \tilde{x} \le 0.$$

Dies ergibt zusammen mit (2. 23.): $\tilde{x} = x^*$. *q. e. d.*

B. 2. 16.

Bedingung (B. 13.) bedeutet einerseits, dass mit nicht abnehmender Gesamtproduktion die Gesamtlieferung der einzelnen Sektoren zur Herstellung einer Produktionseinheit sich nicht erhöht. Andererseits ist sie eine Verallgemeinerung der aus dem Kapitel I bekannten Bauer-Solow-Bedingung.

B. 2. 17.

Zum Beweis des Satzes S. 2. 5. für den Spezialfall (P. 2. 3.) und des Satzes S. 2. 12. genügte. Außer (B. 7.), (B. 8.) eine schwächere Version der Bedingung (B. 13.), nämlich

$$\left\langle \begin{array}{ll} 1^T A(x^2) \le 1^T A(x^1), & \forall x^2 \ge x^1 \ge 0 \\ 1^T A(x) < 1^T, & \forall x : x > A(x)x \end{array} \right\rangle \qquad (B.\ 14.)$$

vorauszusetzen.

Auf den Beweis von S. 2. 12. unter der Bedingung (B. 14.) wird hier verzichtet. Die Argumentation des zweiten Teils des genannten Satzes behält ihre Gültigkeit, benötigt jedoch nicht die zusätzliche Stärke von (B. 13.).

Im Folgenden wird der Satz S. 2. 5. für das Problem (P. 2. 3.) neu formuliert und bewiesen:

S. 2. 13.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1.). Es gelte (B. 7.), (B. 8.) und (B. 14.). Dann gilt:

$$\left\langle \text{ (P. 2. 3.) is lösbar für } \textit{ein } y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\} \right\rangle$$

$$\Rightarrow$$

$$\left\langle \text{(P. 2. 3.) is lösbar für } \textit{alle } y \in R_+^n \right\rangle.$$

Beweis:

Sei $\tilde{x}$ eine Lösung von (P. 2. 3.), die als Grenzwert der durch VSA I definierten Folge $\{\tilde{x}^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$, für $y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\}$ gewonnen wurde. Die Existenz der Lösung $\tilde{x}$ ist durch die Voraussetzung des Satzes und wegen S. 2. 2. gesichert.

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} \approx^{(\nu)}_{x} &= A(\overset{\approx(\nu-1)}{x})\overset{\approx(\nu-1)}{x} + y \\ &\le A(\overset{\approx(\nu)}{x})\overset{\approx(\nu)}{x} + y. && (\because \text{(B. 7.)}) \end{aligned}$$

Damit hat man:

$$\begin{aligned} 1^T \overset{\approx(\nu)}{x} &\le 1^T A(\overset{\approx(\nu)}{x})\overset{\approx(\nu)}{x} + y \\ &\le 1^T A(\overset{\approx(\nu)}{x})\overset{\approx(\nu)}{x} + 1^T y. && (\because \text{(B. 13.) und } \overset{\approx(\nu)}{x} \ge \tilde{x} \text{ (wegen S. 2. 3.)}) \\ (1^T - 1^T A(\overset{\sim(\nu)}{x}))\overset{\approx}{x} &\le 1^T y \\ &> 0. && (\because y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\}) \end{aligned}$$

Da $(1^T - 1^T A(\overset{\sim(\nu)}{x}))$ wegen (B. 13.) streng positiv ist, ist $\{\overset{\approx(\nu)}{x}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$ nach oben beschränkt und damit auch konvergent. Gemäß (S. 2. 2.) ist (P. 2. 3.) für ein $y = \tilde{y} \in R_+^n \setminus \{0\}$ lösbar. Wegen S. 2. 4. ist es auch für alle $y \in R_+^n$ lösbar. *q. e. d.*

B. 2. 18.

Im Folgenden wird das statische volkswirtschaftliche Verflechtungsmodell mit nichtlinearen Aufwandsfunktionen von Sandberg [Vgl. Sandberg, I. W.: A Nonlinear Input-Output Model of a Multisectored Economy. In: Econometrica 41 (1973), S. 1167-1182] behandelt. Dabei werden an die Aufwandsfunktionen

$$b : R_+^n \to R_+^n$$

gestellt:

i. (B. 3.)

ii. b : stetig differenzierbar (B. 15.)

(oder speziell wegen (B. 3.): $\exists \ \dfrac{\partial b_{ij}}{\partial x_j}, \ i, j = 1, 2, ..., n: \ \text{stetig})$

iii. $b(0) = 0$

(oder speziell wegen (B. 3.): $b_{ij}(0) = 0, \ i, j = 1, 2, ..., n)$ (B. 16.)

iv. $\dfrac{db}{dx}(0) \geq \dfrac{db}{dx}(x) \geq 0, \ \forall x \in R_+^n$

(oder speziell wegen (B. 3.):

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j}(0) \geq \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j}(x_j) \geq 0, \ \forall x_j \in R_+^1, \ i, j = 1, 2, ...n) \qquad \text{(B. 17.)}$$

S. 2. 14.

Die in (B. 2. 1.) definierte Aufwandsfunktion $b : R_+^n \to R_+^n$ erfüllt die Bedingung (B. 7.), d.h. ist isoton.

Beweis:

Weil b additiv separabel ist, genügt es zu zeigen, dass die Funktionen $b_{ij}, \ i, j = 1, 2, ..., n$, monoton wachsen.

Seien also

$$x_j^{'}, x_j^{''} \in R_+^1 : \ x_j^{'} < x_j^{''}, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Dann folgt nach einem Mittelwertsatz für ein $\lambda \in \left]x_j^{'}, \ x_j^{''}\right[$ und alle $i, j = 1, 2, ..., n$:

$$b_{ij}(x_j^{''}) - b_{ij}(x_j^{'}) = \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_{ij}}(\lambda)(x_j^{''} - x_j^{'})$$

$$\geq 0. \qquad (\because \ \text{(B.17.)})$$

q. e. d.

L. 2. 1.

Seien

$$A, B \in M(n,n): \text{ reelle: } A \geq B \geq 0 \, .$$

Dann gilt:

$$(E - A) \in M_M \quad \Rightarrow \quad (E - B) \in M_M \, .$$

Beweis:

Es gilt

$$\exists x \in R_+^n: \; (E - A)x = x - Ax > 0. \qquad (\because \; (\text{S. 1. 2. b.}))$$

Andererseits

$$A \geq B \geq 0 \; Ax \geq Bx.$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} (E - B)x &= x - Bx \\ &\geq x - Ax \\ &> 0 \, , \end{aligned}$$

d.h. $B \in M_M$. *q. e. d.*

L. 2. 2.

Sei

$$f(x) := x - b(x). \qquad (2.\ 25.)$$

Gilt für die Jacobische Matrix $\frac{df}{dx}$ von $f(x)$

$$\frac{df}{dx}(0) \in M_M \, ,$$

so gibt es für alle $x^1, x^2 \in R_+^n$ eine $M - \text{Matrix}$

$$B(x^1, x^2) \geq \frac{dt}{dx}(0)$$

mit

$$f(x^1) - f(x^2) = B(x^1, x^2)(x^1 - x^2).$$

Beweis:

Die Anwendung eines Mittelwertsatzes [Vgl. Ortega, J. M.; Rheinboldt, W. C.: Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables, New York-London, 1970, S. 68f.] ergibt

$$f(x^1) - f(x^2) = B(x^1, x^2)(x^1 - x_2)$$

mit

$$B(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(x^2 + \lambda_1\left(x^1 - x^2\right)\right) & . & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\left(x^2 + \lambda_1\left(x^1 - x^2\right)\right) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\left(x^2 + \lambda_n\left(x^1 - x^2\right)\right) & . & . & . & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(x^2 + \lambda_n\left(x^1 - x^2\right)\right) \end{pmatrix},$$

wobei

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in]0,\ 1[$$

gilt.

Wegen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \delta_{ij} - \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j}(x_j), \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

folgt:

$$B(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\partial b_{11}}{\partial x_1}\left(x_1^2 + \lambda_1\left(x_1^1 - x_1^2\right)\right) & . & . & . & -\frac{\partial b_{1n}}{\partial x_n}\left(x_n^2 + \lambda_1\left(x_n^1 - x_n^2\right)\right) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ -\frac{\partial b_{n1}}{\partial x_1}\left(x_1^2 + \lambda_n\left(x_1^1 - x_1^2\right)\right) & . & . & . & 1 - \frac{\partial b_{nn}}{\partial x_n}\left(x_n^2 + \lambda_n\left(x_n^1 - x_n^2\right)\right) \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\frac{df}{dx}(0) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\partial b_{11}}{\partial x_1}(0) & . & . & . & -\frac{\partial b_{1n}}{\partial x_n}(0) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ -\frac{\partial b_{n1}}{\partial x_1}(0) & . & . & . & 1 - \frac{\partial b_{nn}}{\partial x_n}(0) \end{pmatrix}$$

und (B. 17.) folgt

$$B(x^1, x^2) \geq \frac{df}{dx}(0).$$

Weil $\frac{dt}{dx}$ eine $M-$Matrix ist, lässt sich wegen (B. 17.) Das Lemma L. 2. 1. anwenden. Damit ist $B(x^1, x^2)$ eine $M-$Matrix. *q. e. d.*

S. 2. 14.

Sei

$$\frac{df}{dx}(0) \in M_M.$$

Dann gilt stets für alle $x^1, x^2 \in R_+^n$:

$$f(x^1) \geq f(x^2) \;\Rightarrow\; x^1 \geq x^2.$$

Beweis:

Unter Anwendung von L.2.2. ergibt sich:

$$0 \leq f(x^1) - f(x^2)$$

$$= B(x^1, x^2)(x^1 - x^2)$$

mit einer $M-$Matrix $B(x^1, x^2)$. Wegen $B(x^1, x^2)^{-1} \geq 0$ folgt $x^1 - x^2 \geq 0.$ *q. e. d.*

B. 2. 19.

Satz S. 2. 14. verallgemeinert die Aussage von S. 1. 4. und besagt, dass eine Erhöhung der Endnachfrage eine Erhöhung der Gesamtproduktion erfordert (vgl. B. 1. 3.)

S. 2. 15.

Sei

$$\frac{df}{dx}(0) \in M_M.$$

Dann ist f injektiv.

Beweis:

Sei

$$f(x^1) = f(x^2),$$

d.h.

$$f(x^1) \geq f(x^2) \quad \wedge \quad f(x^1) \leq f(x^2).$$

Dann folgt wegen (S. 2. 14.)

$$x^1 \geq x^2 \quad \wedge \quad x^1 \geq x^2 \ ,$$

also

$$x^1 = x^2. \qquad\qquad q.\ e.\ d.$$

B. 2. 20.

S. 2. 15. bedeutet: Jede Endnachfrage kann mit genau einer Gesamtproduktion realisiert werden.

L. 2. 3.

Sei $t: R_+^n \to R_+^n$ stetig mit $t(0) = 0$. Sei

$$D := \left\{ x \mid x \in R_+^n, t(x) \geq 0 \right\}.$$

Es gelte ferner:

(i) Für jedes $y \in R^n, y > 0$ und jedes $\alpha \geq 0$ mit $\alpha y \in t(D)$ gibt es eine positive reelle Zahl β, so dass $(\alpha + \gamma) y \in t(D)$ ist für alle $\gamma \in \left]0, \ \beta\right]$.

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $\|x\|_2 \geq \delta$ gilt $\|t(x)\|_2 \geq \varepsilon$.

Dann ist $t(D) = R_+^n$. Ist t / D injektiv, so ist die Umkehrabbildung $\left(t / D\right)^{-1} : R_+^n \to D$ stetig.

Beweis:

Um zu zeigen, dass $t(D)$ abgeschlossen ist, wählen wir eine Folge $\left\{ y^{(i)} \right\}, i \in N,$ mit $y^{(i)} \in t(D), \ i = 1, 2, \ldots$ und $\lim\limits_{i \to \infty} y^{(i)} = y.$ Wegen $t(D) \subset R_+^n$ b gilt $y \in R_+^n$. Zu zeigen ist jetzt, dass es ein $x \in D$ mit $t(x) = y$ gibt. Wegen $y^{(i)} \in t(D)$ gibt es eine Folge $\left\{ x^i \right\}, i \in N$ mit $x^{(i)} \in D$ und $t(x^{(i)}) = y^{(i)}, i = 1, 2, \ldots$ Aus Bedingung (ii) folgt, dass $\left\{ x^i \right\}, i \in N$ unbeschränkt ist und somit eine konvergente Teilfolge $\{ \tilde{x}^{(i)} \}, i \in N$ enthält.

Sei $x := \lim\limits_{i \to \infty} \tilde{x}^{(i)}$. Es gilt $x \in D$, weil D wegen der Stetigkeit von t abgeschlossen ist. Weiter folgt

$$t(x) = t(\lim_{i \to \infty} \tilde{x}^{(i)}) = \lim_{i \to \infty} f(\tilde{x}^{(i)}) = y.$$

Also $t(D)$ ist abgeschlossen.

Sei $y \in R^n$ und $y > 0$. Wegen $0 \in t(D)$ ist

$$M := \left\{ \delta \mid \delta \in R_+^1, \tau y \in t(D) \text{ für alle } \tau \in [0,\ \delta] \right\} \neq \varnothing.$$

Sei $\lambda := \sup M$. Angenommen, es sei $\lambda < \infty$. Dann folgt $\lambda y \in t(D)$, weil $t(D)$ abgeschlossen ist. Wegen Bedingung (i) gibt es dann ein $\beta > 0$, so dass $\tau y \in t(D)$ ist für alle $\tau \in [0,\ (\lambda + \beta)]$. Das ist ein Widerspruch zu $\lambda = \sup M$. Also gilt $\tau y \in t(D)$ für alle $\tau \geq 0$. Damit folgt

$$\left\{ y \mid y \in R^n, y > 0 \right\} \subset t(D).$$

Wegen der Abgeschlossenheit von $t(D)$ und $t(D) \in R_+^n$ erhält man damit $t(D) = R_+^n$.

Sei weiter t/D injektiv und $t(x) = y$ für ein $x \in D$. Sei $\left\{ y^{(i)} \right\}, i \in N,$ eine Folge in R_+^n mit $\lim\limits_{i \to \infty} y^{(i)} = y$. Sei $\left\{ x^{(i)} \right\}, i \in N,$ die durch $t(x^i) = y^{(i)},\ i = 1, 2, ..., n,$ in D definierte Folge. Sei $\tilde{x}$ ein beliebiger Häufungspunkt von $\left\{ x^{(i)} \right\}, i \in N,$ und $\{ \tilde{x}^{(i)} \}, i \in N,$ eine Teilfolge von $\left\{ x^{(i)} \right\}, i \in N,$ die gegen $\tilde{x}$ konvergiert. Wegen der Abgeschlossenheit von D ist $\tilde{x} \in D$, und wegen der Stetigkeit von t folgt:

$$t(x) = y = \lim_{i \to \infty} t(\tilde{x}^i) = t(\lim_{i \to \infty} \tilde{x}^i) = t(\tilde{x}).$$

Weil t/D injektiv ist, folgt $x = \tilde{x}$ und x ist der einzige Häufungspunkt von $\left\{ x^{(i)} \right\}, i \in N,$ d.h. $\lim\limits_{i \to \infty} x^{(i)} = x$.

Die Abbildung $(t/D)^{-1}$ ist also stetig. *q. e. d.*

S. 2. 16.

Die Matrix $\dfrac{df}{dx}(0)$ ist genau dann $M-$Matrix, wenn es für jedes $y \in R_+^n$ genau ein $x \in R_+^n$ mit $f(x) = y$ gibt, x stetig von y abhängt und für alle $y \in R_+^n$ gilt:

$$f^{-1}(y) = My + O(y)$$

mit $M \in M_M$ und einer stetigen Abbildung $O : R_+^n \to R^n$ mit $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{O(y)}{\|y\|_2}$.

Beweis:

Sei S eine Umgebung des R_+^n und $\tilde{b} : E \to R_+^n,\ \tilde{b}(x) := \sum\limits_j \tilde{b}^j (x_j),$ eine Abbildung mit $\tilde{b} \mid R_+^n \equiv b$

und

$$\frac{\partial \tilde{b}^j}{\partial x_j}(x_j) = \frac{\partial b_j}{\partial x_j}(0)$$

für alle $x \in S$ mit $x_j < 0$. Sei ferner $\tilde{f} \equiv id - \tilde{b}$.

"$\Rightarrow$"

Sei $\frac{df}{dx}(0)$ eine $M-$Matrix.

Wegen (B. 17.) und (L. 2. 1.) ist $\frac{d\tilde{f}}{dx}(x)$ für alle $x \in S$ eine $M-$Matrix. Insbesondere gilt

$$\det\left(\frac{d\tilde{f}}{dx}(x)\right) \neq 0 \quad \text{für } \forall x \in S.$$

Damit ist $\tilde{f}$ ein lokaler Diffeomorphismus von S in R^n. Sei $y \in R^n,\ y > 0$ und $\alpha \in R_+^1$, so dass es ein $x \in R_+^n$ gibt mit $f(x) = \alpha y$. Es existiert eine Umgebung von x, die bijektiv auf eine Umgebung von αy abgebildet wird. Deshalb gibt es eine positive reelle Zahl β und ein $x_\gamma \in S$, so dass $\tilde{f}(x_\gamma) = (\alpha + \gamma)\, y$ für alle $\gamma \in]0,\ \beta]$. Wegen $f(x) = \alpha y < (\alpha+\gamma) y = \tilde{f}(x_\gamma)$ folgt mit S. 2. 14., dass für alle $\gamma \in]0,\ \beta]$ gilt $x \leq x_\gamma$. Damit erfüllt f die Voraussetzung (i) von L. 2. 3.

Wegen L. 2. 2. und $f(0) = 0$ gibt es für alle $x \in R_+^n$ eine $M-$Matrix $B(x)$ mit $f(x) = B(x) \cdot x$ und $B(x) \geq \frac{df}{dx}(0)$. Dann ist auch $B(x) \cdot x \geq \frac{df}{dx}(0) \cdot x$ für alle $x \in R_+^1$ und damit:

$$\|f(x)\|_2^2 = \|B(x) \cdot x\|_2^2 \qquad (2.\ 26.)$$

$$\geq \left\|\frac{df}{dx}(0) \cdot x\right\|_2^2.$$

Die durch $C := \frac{df}{dx}(0)^T \cdot \frac{df}{dx}(0)$ definierte Matrix ist wegen

$$\left(\left(\frac{df}{dx}(0)\right)^T \frac{df}{dx}(0)\right)^T = \left(\frac{df}{dx}(0)\right)^T \cdot \frac{df}{dx}(0)$$

symmetrisch. Deshalb gib es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $z^1, z^2, \ldots z^n$ von C und die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sind reell.

Sei $x \in R_+^n$ und $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot z^i$ eine Basisdarstellung von x. Dann folgt:

$$\left\| \frac{df}{dx}(0) \cdot x \right\|_2 = x^T \left(\frac{df}{dx}(0) \right)^T \cdot \frac{df}{dx}(0) \cdot x \qquad (2.\ 27.)$$

$$= x^T C x$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z^i \right)^T \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j C z^j \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z^i \right)^T \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j z^j \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \lambda_j \left(z^i \right)^T z^j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \lambda_j \delta_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i$$

$$\geq \left(\min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j \right) \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 .$$

Wegen

$$z^T C z = \left(\frac{df}{dx}(0) \cdot z \right)^T \cdot \frac{df}{dx}(0) \cdot z \geq 0, \quad \forall z \in R^n$$

ist $C > 0$. Da C außerdem invertierbar ist, folgt:

$$\lambda := \min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j > 0 .$$

Wegen

$$\|x\|_2^2 = x^T x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j (z^i)^T z^j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$$

ergibt sich jetzt aus (2. 27.) – (2. 28.):

$$\| f(x) \|_2^2 \geq \lambda \|x\|_2^2 .$$

Unter Benutzung dieser Abschätzung erhält man für ein $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ nämlich $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}$, so dass für alle $x \in R_+^n$ mit $\|x\|_2 \geq \delta$ gilt:

$$\| f(x) \| \geq \sqrt{\lambda} \cdot \|x\|$$

$$\geq \sqrt{\lambda} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}$$

$$= \varepsilon.$$

Also ist Bedingung (i) von L. 2. 3. erfüllt.

Durch Anwendung von L. 2. 3. ergibt sich, dass zu jedem $y \in R_+^n$ ein $x \in R_+^n$ existiert mit $f(x) = y$. Dieses x ist wegen S. 2. 15. eindeutig bestimmt und hängt wegen L. 2. 3. stetig von y ab.

Wegen $\det\left(\frac{d\tilde{f}}{dx}(0)\right) \neq 0$ ist $\tilde{f}$ im Nullpunkt ein lokaler Diffeomorphismus. Es gibt also eine offene

Umgebung $U(0)$ und eine stetige Abbildung $\bar{o}: U(0) \to R^n$ mit $\lim_{y \to 0} \frac{\bar{o}(y)}{\|y\|_2}$, so dass wegen $\tilde{f}(x) = 0$

für alle $y \in \tilde{f}(U(0))$ gilt:

$$\tilde{f}^{-1}(y) = \tilde{f}^{-1}(0) + \frac{d\tilde{f}^{-1}}{dy}(0)(y-0) + \bar{o}(y-0)$$

$$= \left(\frac{d\tilde{f}}{dx}(0)\right)^{-1} + o(y).$$

Daraus folgt für $y \in R_+^n$:

$$f^{-1}(y) = \left(\frac{df}{dx}(0)\right)^{-1} y + o(y)$$

mit einer Abbildung $o: R_+^n \to R^n$, die wegen der Stetigkeit von f^{-1} stetig ist und für die wegen $o \mid R_+^n \cap (o) \equiv \bar{o}$ gilt: $\lim_{y \to 0} \frac{o(y)}{\|y\|_2} = 0$.

($\Leftarrow$)

Wir nehmen an, dass die Umkehrabbildung $f^{-1}: R_+^n \subset f(R_+^n) \to R_+^n$ existiert und stetig ist und dass für alle $y \in R_+^n$ gilt:

$$f^{-1}(y) = My + o(y),$$

wobei $M \in M_M$ und $o: R_+^n \to R^n$ eine stetige Abbildung mit $\lim_{y \to 0} \frac{o(y)}{\|y\|_2} = 0$ ist.

Die Abbildung $\tilde{f}$ ist im Nullpunkt stetig differenzierbar. Es gibt also eine offene Menge $U(0)$ und eine Abbildung $\tilde{o}: U(0) \to R^n$ mit, so dass für alle $x \in U(0)$ gilt:

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(0) + \frac{d\tilde{f}}{dx}(0)(x-0) + \tilde{o}(x-0)$$

$$= \frac{d\tilde{f}}{dx}(0)x + \tilde{o}\,x.$$

Damit erhält man für alle $y \in R_+^n$ mit $f^{-1}(y) \in U(0)$:

$$y = \tilde{f}(f^{-1}(y))$$

$$= \tilde{f}(My + o(y))$$

$$= \frac{df}{dx}(0)My + \frac{df}{dx}(0)o(y) + \tilde{o}(My + o(y))$$

Daraus folgt

$$(E - \frac{df}{dx}(0)M)y = \frac{df}{dx}(0)o(y) + \tilde{o}(My + o(y))$$

und weiter

$$(E - \frac{df}{dx}(0)M)\frac{y}{\|y\|_2} = \frac{df}{dx}(0)\frac{o(y)}{\|y\|_2} + \frac{\tilde{o}(my + o(y))}{\|y\|_2}.$$

Nach Definitionen der Abbildungen 0 und $\tilde{0}$ geht die rechte Seite für $y \to 0$ gegen Null.

Also ist $\left(E - \dfrac{df}{dx}(0)M\right) = 0,$ d.h. $M = \left(\dfrac{df}{dx}(0)\right)^{-1}$. Weiter muss gelten, dass $\left(\dfrac{df}{dx}(0)\right)^{-1} \geq 0$ ist.

Denn wäre das nicht der Fall, so gäbe es ein $y \in R_+^n$, derart dass eine Komponente von

$f^{-1}(y) = \left(\dfrac{df}{dx}(0)\right)^{-1} + o(y)$ negativ wäre. Also ist $\dfrac{df}{dx}(0)$ eine $M-\mathrm{Matrix}$. q. *e. d.*

B. 2. 21.

Sandberg gibt zur Lösung des Problems (P. 2. 1'.) mit (B. 3.). B(5) – B(17) ein globales Newtonsches Iterationsverfahrens an, für dessen Konvergenz zusätzlich die (einschneidende) Voraussetzung notwendig ist, dass

$$b: \text{ konkav} \qquad \text{(B. 18.)}$$

oder speziell wegen (B. 3.), (B. 15.)

$$\frac{db^j}{dx_j}(x_j^1) \geq \frac{db^j}{dx_j}(x_j^2),\ \forall x_j^2 \geq x_j^1 \geq 0,\ j=1,...,n, \tag{2. 28.}$$

gilt.

Das Verfahren wird im Kapitel III näher untersucht [Vgl. S. 3. 19.].

B. 2. 22.

Sandberg gibt einen weiteren Existenzsatz an, für den nicht alle in B. 2. 18. gemachten Voraussetzungen benötigt werden und der deshalb wesentlich allgemeiner als S. 2. 16. ist. Für unseren Beweis wird lediglich L. 2. 3. benötigt.

S. 2. 17.

Die S eine offene Umgebung des R_+^n und $f: S \to R^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $f(0)=0.$ Sei $\frac{df}{dx}(0)$ eine $M-\text{Matrix}$ für alle $x \in S$. Dann gibt es ein eindeutiges $x \in R_+^n$ mit $f(x)=y$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in R_+^n$ mit $\|x\|_2 \geq \delta$ gilt $\|f(x)\|_2 \geq \varepsilon.$

Beweis:

Siehe Sandberg, S. 1181f.

B. 2. 23.

Im Folgenden wird ein statisches volkswirtschaftliches Verflechtungsmodell diskutiert, das im gewissen Sinne eine Verallgemeinerung der Problemstellung von Sandberg darstellt:

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.), wobei die Aufwandsfunktion $b: R_+^n \to R_+^n$ folgende Bedingungen erfüllt:

1) (B. 7.)
2) (B. 16.)
3) (B. 18.)

d.h.

$$b\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x^2\right) \geq \lambda b(x^1) + (1-\lambda)b(x^2),\ \forall x^1, x^2 \in R_+^n;\ \forall \lambda > 1 \tag{2. 29.}$$

4) b ist für alle $x \in R_+^n$ Frechet-differenzierbar, d. h. es existiert $b'(x)$ für alle $x \in R_+^n$

Bedingung (B. 29.) impliziert insbesondere (B. 9.).

Bedingung (4) ist eine Verallgemeinerung der Bedingung (B. 15.). Sie bedeutet: Jede infinitesimal kleine Änderung der Gesamtproduktion hat eine infinitesimal kleine Änderung vom Aufwand zur Folge.

B. 2. 24.

Wegen der Differenzierbarkeit von $b(x)$ resultiert aus (2. 29.) die Ungleichung

$$b(x^2)-b(x^1)\le b'(x^1)(x^2-x^1),\ \forall x^1,x^2\in R_+^n, \tag{2. 30.}$$

wobei $b'(x)$ die Frechet-Ableitung der Abbildung b im Punkt x ist.

B. 2. 25.

Sei

$$b_y(x):=b(x)+y,\quad y\in R_+^n. \tag{2. 31.}$$

Offensichtlich erfüllt auch $b_y(x)$ die Bedingung (B. 18.) und folglich die Ungleichung (2. 30.):

$$\begin{aligned} b(x^2)-b(x^1) &\le b_y'(x^1)(x^2-x^1) \\ &= b'(x^1)(x^2-x^1). \end{aligned} \tag{2. 32.}$$

Wie in B. 2. 10. bemerkt, ist die Lösbarkeit von (P. 2. 1'.) unter den Voraussetzungen 1) – 5) äquivalent der Lösbarkeit von

$$x=b_y(x). \tag{2. 33.}$$

S. 2. 18.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.), wobei die Aufwandsfunktion $b:R_+^n\to R_+^n$ die in B. 2. 23. gemachten Voraussetzungen erfüllen möge. Ferner sei ein festes $x^0\in R_+^n\setminus\{0\}$ und eine Konstante $\lambda\in[0,\ 1[$.

Dann gilt:

$$\langle b(x^0)\le\lambda x^0\rangle\ \Leftrightarrow\ \langle(\text{P. 2. 1'.) ist global lösbar}\rangle.$$

Beweis:

$(\Rightarrow)$

Es gilt

$$b_y(y) \geq y\,. \tag{2. 34.}$$

Sei

$$t_0 > 0: \quad y \leq t_0(1-\lambda)x^0.$$

(Die Existenz von t_0 ist dadurch gesichert, dass $x^0 > 0$ gilt.)

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $t_0 > 1$. Es gilt dann:

$$b_y(t_0 x^0) = b(t_0 x^0) + y$$

$$\leq t_0 b(x^0) + y \qquad (\because \text{ (B. 9.)})$$

$$\leq t_0 \lambda x^0 \qquad (\because \text{ (B. 19.)})$$

$$\leq t_0 x^0. \tag{2. 35.}$$

$$y \leq t_0 x^0 \qquad (\because \text{ (B. 7.), (B. 20) })$$

$$y \leq x \leq t_0 x^0.$$

Da die Menge $[y,\ t_0 x]$ beschränkt, konvex und abgeschlossen ist, hat die Abbildung b_y nach dem Fixpunktsatz von Brouwer auf dieser Menge mindestens einen Fixpunkt.

Außerdem gilt für die Folgen

$$\{x^{(\nu)}\}, \quad x^0 := y, \quad x^{(\nu)} := b_y(x^{(\nu-1)}), \quad \nu \in N$$

bzw.

$$\{\tilde{x}^{(\nu)}\}, \quad \tilde{x}^0 := y, \quad \tilde{x}^{(\nu)} := b_y(\tilde{x}^{(\nu-1)}), \quad \nu \in N\,.$$

$$\lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)} = x^*$$

bzw.

$$\lim_{\nu\to\infty} \tilde{x}^{(\nu)} = x^*.$$

Dabei gilt:

$$x^* = b_y(x^*)$$

bzw.

$$\tilde{x}^* = b_y(\tilde{x}^*).$$

Es gilt ferner:

$$x^{(\nu-1)} \leq x^{(\nu)}, \quad \nu \in N$$

$$\tilde{x}^{(\nu-1)} \leq \tilde{x}^{(\nu)}, \quad \nu \in N$$

$$x^{(\nu)} \leq \tilde{x}^{(\nu)}, \quad \nu \in N .$$

$(\Leftarrow)$

Es gilt laut Voraussetzung

$$0 \leq x^0 \leq b(x^0) + y^0.$$

Sei nun

$$\beta > 0: \quad y^0 \geq \beta x^0.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} b(x^0) &= x^0 + y^0 \\ &\leq x^0 - \beta x^0 \\ &= (1-\beta)x^0 \\ &= \lambda x^0 \end{aligned}$$

mit

$$1-\beta := \lambda.$$ *q. e. d.*

S. 2. 19.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.). Dabei möge die Aufwandsfunktion $b: R_+^n \to R_+^n$ die Bedingung (B. 7.) erfüllen.

Dann gilt:

$$\langle \text{B. 19.} \rangle \;\Leftrightarrow\; \langle \text{(P. 2. 1'.) ist global lösbar} \rangle.$$

Beweis:

Der Beweis folgt aus dem Satz von Birkhoff und aus der Tatsache, dass eine monotone Abbildung bezüglich der Menge $\left[y,\ t_0 x^0 \right]$ invariant ist. *q. e. d.*

B. 2. 26.

Im Gegensatz zum Satz S. 2. 18. garantieren die Bedingungen von S. 2. 19. nicht die Konvergenz der Folgen

$$\{x^{(\nu)}\}, \quad x^0 := y, \quad x^{(\nu)} := b_y(x^{(\nu-1)}), \quad \nu \in N$$

bzw.

$$\{\tilde{x}^{(\nu)}\}, \quad \tilde{x}^0 := y, \quad \tilde{x}^{(\nu)} := b_y(\tilde{x}^{(\nu-1)}), \quad \nu \in N$$

gegen eine Lösung des Problems (P. 2. 1'.).

B. 2. 27.

Die Bedingung (B. 19.) garantiert nicht die Eindeutigkeit der Lösung von (P. 2. 1'.). Hierzu könnte folgendes Beispiel betrachtet werden.

Sei

$$b(x_1, x_2) := \left(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}\right)^T, \quad y := (0,\ 2)^T.$$

$b(x)$ erfüllt die in B. 2. 23. angeführten Bedingungen und (B. 19.).

(Zur Überprüfung von (B. 19.) genügt es, $x^0 = (4,\ 4)^T$ zu wählen, woraus $\lambda = \frac{1}{2} < 1$ resultiert.)

S. 2. 21.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.), wobei die Aufwandsfunktion $b: R_+^n \to R_+^n$ die in B. 2. 23. angeführten Bedingungen erfüllen möge. Es gelte ferner (B. 19.) und

$$\left\langle b'(x) \text{ ist für kein } x \in R_+^n \setminus \{0\} \text{ zerlegbar.} \right\rangle \qquad \text{(B. 20.)}$$

Dann gilt folgendes:

A. Das Problem (P. 2. 1'.) hat für jedes $y^0 \in R_+^n \setminus \{0\}$ eine eindeutige Lösung $x^* = x(y)$.
B. Die Folgen

$$\{x^{(\nu)}\}, \quad x^0 := y, \quad x^{(\nu)} := b_y(x^{(\nu-1)}), \quad \nu \in N$$

bzw.

$$\{\tilde{x}^{(\nu)}\}, \quad \tilde{x}^0 := y, \quad \tilde{x}^{(\nu)} := b_y(\tilde{x}^{(\nu-1)}), \quad \nu \in N$$

konvergieren monoton gegen x^*. Dabei gilt:

$$x^{(\nu-1)} \le x^{(\nu)} \le x^* \le \tilde{x}^{(\nu)} \le \tilde{x}^{(\nu-1)}, \quad \nu \in N.$$

C. Die Folge

$$\approx{x}^{(\nu)} := b_y(\approx{x}^{(\nu-1)}), \quad \nu \in N,$$

konvergiert für ein beliebiges $\approx{x}^0 \in R_+^n \setminus \{0\}$ gegen x^*

Beweis:

A:

Das Problem (P. 2. 1'.) möge für $y^0 > 0$ mindestens zwei verschiedene Lösungen $\bar{x}^1, \bar{x}^2 > 0$ haben:

$$\bar{x}^1 = b(\bar{x}^1) + y^0$$

$$\bar{x}^2 = b(\bar{x}^2) + y^0.$$

Offensichtlich gehört dann einer der Vektoren $(\bar{x}^1 - \bar{x}^2)$, $(\bar{x}^2 - \bar{x}^1)$ der Menge R_+^n nicht an. Es gelte z.B. $(\bar{x}^1 - \bar{x}^2) \notin R_+^n$. Dann hat man:

$$(\bar{x}^1 - \bar{x}^2) = b(\bar{x}^1) - b(\bar{x}^2)$$

$$\le b'(\bar{x}^2)(\bar{x}^1 - \bar{x}^2).$$

Da der Operator b monoton ist, ist seine Frechet-Ableitung $b'(x)$ ($x \in R_+^n$) ein positiver linearer Operator. Unter Berücksichtigung von der obigen Ungleichung und nach dem Satz über Abschätzung (nach unten) des Spektralradius eines positiven linearen Operators [Vgl. Krasnoselski, M. A. u a.: Näherungsverfahren zur Lösung von Operatorgleichungen, Akademie-Verlag, Berlin, 1973] erhält man:

$$r\left[b'(\bar{x}^2) \right] \ge 1.$$

Setzt man in (2. 30.) $x^2 = 0$, $x^1 = \bar{x}^2$ ein, so ergibt sich

$$-b(\bar{x}^2) \le -b'(\bar{x}^2)\bar{x}^2,$$

d.h.

$$b(\bar{x}^2) \ge b'(\bar{x}^2)\bar{x}^2.$$

Also

$$x^2 = b(\bar{x}^2) + y^0$$

$$> b(\bar{x}^2)$$

$$\geq b'(\bar{x}^2),$$

d.h.

$$b'(\bar{x}^2)\bar{x}^2 < \bar{x}^2.$$

Aus der letzten Ungleichung und dem Satz über die strenge Abschätzung (nach oben) des Spektralradius eines linearen positiven nicht zerlegbaren Operators [ebenda]resultiert:

$$r\left[b'(\bar{x}^2)\right] \leq 1.$$

Dies widerspricht jedoch der Behauptung $r\left[b'(\bar{x}^2)\right] \geq 1$.

B:

Beim Beweis von Satz S. 2. 18. wurde gezeigt, dass

$$x^{(\nu)} \leq \tilde{x}^{(\nu)}, \quad \nu \in N$$

gilt und dass die Folgen $\{\{x^{(\upsilon)}\}\},\ \{\bar{x}^{(\upsilon)}\},\ \upsilon \in N \cup \{0\}$ monoton gegen die Lösungen $x^*,\ \bar{x}^*$

konvergieren. Auf Grund der Eindeutigkeit der Lösungen $x^* = \bar{x}^*$ schließen wir auf die Konvergenz der beiden genannten Folgen gegen x^*.

C:

Siehe Stecenko, V. Ja.; Tumanov, L. A.; Šutov, V. G.: K teorii nelinejnich modelej mežotraslevovoj balansa. In: Modeli I metody analiza ekonomičeskych celenapravlennych systemy, Novosibirsk 1977.

III

Verfahren zur Lösung nichtlinearer Input-Output-Modelle

B. 3. 1.

Im Kapitel II wurde das Verfahren VSA I:

i) $x^{(0)} := y$ (VSA I)

ii) $x^{(\nu)} := b(x^{(\nu-1)}) + y, \quad \nu \in N,$

zur Lösung des Problems (P. 2. 1'.) vorgeschlagen und dessen wichtigste Eigenschaften im Zusammenhang mit der Lösbarkeit des genannten Problems untersucht. In diesem Kapitel werden zunächst weitere Eigenschaften dieses Verfahrens *aus numerischer Sicht* und insbesondere in Verbindung mit der Kontraktionsbedingung erörtert (Vgl. B. 2. 10, B. 2. 11., S. 2. 7., S. 2. 8.).

S. 3. 1.

Gegeben sei

$$b: \; D \subset R^n \to R^n,$$

$$K_0 := \left\{ x \mid x \in R^n, \left\| x - x^0 \right\| \le \delta \right\} \subset D, \quad x^0 \in D, \; \delta > 0$$

und b auf K_0 kontrahierend mit dem Kontraktionsfaktor $\lambda < 1$.

Ferner sei

$$f: \; id - b$$

und

$$K_1 := \left\{ y \mid y \in R^n, \left\| y - f(x^0) \right\| \le (1-\lambda)\delta \right\}.$$

Dann gibt es für alle $y \in K_1$ ein eindeutig bestimmtes $x^* \in K_0$ mit

$$f(x^*) = y,$$

und die Folge

$$x^{(\nu)} := b(x^{(\nu-1)}) + y, \quad \nu \in N$$

konvergiert gegen x^*.

Beweis:

Für ein festes $y \in K_1$ sei die Abbildung $g: D \subset R^n$ definiert durch

$$g(x) := b(x) + y$$
$$= x - (f(x) - y), \ \forall x \in D.$$

Dann ist g trivialerweise auf K_0 kontrahierend. Für alle $x \in K_0$ gilt dann:

$$\left\|g(x) - x^0\right\| \le \left\|g(x) - g(x^0)\right\| + \left\|g(x^0) - x^0\right\|$$
$$\le \lambda\left\|x - x^0\right\| + \left\|f(x^0) - y\right\|$$
$$\le \lambda\delta + (1-\lambda)\delta$$
$$= \delta_1,$$

d. h. es gilt $g(K_0) \subset K_0$. Nach Satz S. 2. 7. hat g dann einen eindeutig bestimmten Fixpunkt x^* in K_0:

$$x^* = g(x^*)$$
$$= b(x^*) + y,$$

also

$$f(x^*) = y,$$

und die Folge $x^{(\nu)} := b(x^{(\nu-1)}) + y, \ \nu \in N$, konvergiert gegen x^*. *q. e. d.*

B. 3. 2.

Der Satz S. 3. 1. gewährleistet die Eindeutigkeit der Lösung nur in K_0, nicht aber in D.

B. 3. 3.

Der Kontraktionssatz S. 2. 7. hat die angenehme Eigenschaft, dass er eine leicht berechenbare Fehlerabschätzung liefert, die beim $\nu-\mathrm{ten}$ Schritt des Iterationsverfahrens die Abweichung vom Grenzwert in Abhängigkeit vom letzten Schritt und der Kontraktionskonstanten λ ausdrückt:

S. 3. 2.

Unter den Voraussetzungen des Satzes S. 2. 7. gilt für die Folge (2. 18.) die Fehlerabschätzung:

$$\left\|x^{(\nu)} - x^*\right\| \le \frac{\lambda}{1-\lambda}\left\|x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}\right\| \tag{3. 1.}$$
$$\le \frac{\lambda^\nu}{1-\lambda}\left\|g(x^0) - x^{(0)}\right\|, \quad \nu \in N,$$

wobei $\lambda < 1$ die Kontraktionskonstante der Abbildung g ist.

Beweis:

Es gilt für ein $\nu \geq 1$ [vgl. den Beweis vom Satz S. 2. 7.]:

$$\left\|x^{(\nu)} - x^*\right\| \leq \left\|x^{(\nu)} - x^{(\nu+\vartheta)}\right\| + \left\|x^{(\nu+\vartheta)} - x^*\right\|$$

$$\leq \frac{\lambda}{1-\lambda}\left\|x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}\right\| + \left\|x^{(\nu+\vartheta)} - x^*\right\|.$$

Durch den Grenzübergang $\vartheta \to \infty$ folgt daraus:

$$\left\|x^{(\nu)} - x^*\right\| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}\left\|x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}\right\|.$$

Jetzt folgen die behaupteten Ungleichungen unter Benutzung von

$$\left\|x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}\right\| = \left\|g(x^{(\nu)}) - g(x^{(\nu-1)})\right\|$$

$$\leq \lambda\left\|x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}\right\|.$$

q. e. d.

B. 3. 4.

In den nachfolgenden Aussagen befassen wir uns mit einer Sensitivitätsanalyse des statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodells mit kontrahierender Aufwandsfunktion. Zunächst wenden wir uns der Fragestellung zu, was mit der Lösung passiert, wenn man vom Endnachfragevektor y auf einen anderen Endnachfragevektor $\tilde{y}$ übergeht. Ist die Lösung stabil? Das heißt ändert sich der Vektor der Gesamtproduktion nur wenig, wenn der Endnachfragevektor wenig verändert wird?

S. 3. 3.

Sei $b:\ D \subset R^n \to R^n$ kontrahierend mit $\lambda < 1$ und $f:\ D \to R^n$ definiert durch

$$f(x) := x - b(x),\ \ \forall x \in D.$$

Dann ist $f:\ D \to f(D)$ bijektiv, f^{-1} stetig und es gilt:

$$\left\|f^{-1}(y) - f^{-1}(\tilde{y})\right\| \leq \frac{1}{1-\lambda}\left\|y - \tilde{y}\right\|, \quad \forall y, \tilde{y} \in f(D).$$

Beweis:

Für alle $y \in f(D)$ gilt $x = b(x) + y$ für ein $x \in D$, d.h. x ist Fixpunkt der kontrahierenden Abbildung $b + y$. Nach dem Beweis von S. 2. 7. ist dieser Fixpunkt aber eindeutig. Damit folgt die Injektivität von f, und $f: D \to f(D)$ ist bijektiv.

Weiter gilt für alle $x, \tilde{x} \in D$:

$$\| f(x) - f(\tilde{x}) \| = \| x - \tilde{x} - (b(x) - b(\tilde{x})) \|$$

$$\geq \left\| \| x - \tilde{x} \| - \| b(x) - b(\tilde{x}) \| \right\|$$

$$\geq \| x - \tilde{x} \| - \lambda \| x - \tilde{x} \|$$

$$= (1-\lambda) \cdot \| x - \tilde{x} \|.$$

Seien $y, \tilde{y} \in f(D)$ und $x, \tilde{x} \in D$ mit $f(x) = y$ und $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \| f^{-1}(y) - f^{-1}(\tilde{y}) \| &= \| x - \tilde{x} \| \\ &\leq \frac{1}{1-\lambda} \| f(x) - f(\tilde{x}) \| \\ &= \frac{1}{1-\lambda} \| y - \tilde{y} \|. \end{aligned}$$

Dies ist die behauptete Abschätzung, und aus ihr folgt die Stetigkeit von f^{-1}. *q. e. d.*

B. 3. 6.

Man kann weiter fragen, was geschieht, wenn man von der kontrahierenden Aufwandsfunktion b zu der Aufwandsfunktion $\tilde{b}$ übergeht, oder noch allgemeiner von der Iterationsfunktion $g(x) = b(x) + y$ zu $\tilde{g}(x) = \tilde{b}(x) + \tilde{y}$. Die Abbildung $\tilde{g}$ braucht hierbei nicht notwendig kontrahierend zu sein. Der folgende Satz beschreibt das Verhalten der Folgenglieder:

S. 3. 4.

Sei $D \subset R_+^n$ und $g : D \to D$ eine kontrahierende Abbildung mit der Kontraktionskonstanten $\lambda < 1$. Sei $\tilde{g} : D \to D$, und es gelte für ein $\varepsilon > 0$ und alle $x \in D$:

$$\| g(x) - \tilde{g}(x) \| < \varepsilon .$$

Seien $\bar{x}^{(0)}, \bar{\bar{x}}^{(0)} \in D,\ \bar{x}^{(0)} \leq \bar{\bar{x}}^{(0)},\ \bar{x}^{(\nu)} = g(\bar{x}^{(\nu-1)})$ und $\bar{\bar{x}}^{(\nu)} = g(\bar{\bar{x}}^{(\nu-1)})$ für $\nu \in N$.

Dann gilt für alle $\nu \in N$:

$$\| \bar{x}^{(\nu)} - \bar{\bar{x}}^{(\nu)} \| \leq \varepsilon \sum_{j=0}^{\nu-1} \lambda^j .$$

Beweis:

Wir beweisen die Abschätzung durch Induktion über ν:

Der Fall $\nu = 1$ ist klar.

Die Behauptung sei für ν richtig. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\| \bar{x}^{(\nu)} - \bar{\bar{x}}^{(\nu)} \| &\le \| g(\bar{x}^{(\nu)}) - g(\bar{\bar{x}}^{(\nu)}) \| + \| g(\bar{\bar{x}}^{(\nu)}) - \tilde{g}(\bar{\bar{x}}^{(\nu)}) \| \\
&\le \lambda \| \bar{x}^{(\nu)} - \bar{\bar{x}}^{(\nu)} \| + \varepsilon \\
&\le \lambda \varepsilon \sum_{j=0}^{\nu-1} \lambda^j + \varepsilon \\
&= \varepsilon \sum_{j=0}^{\nu} \lambda^j .
\end{aligned}$$

q. e. d.

B. 3. 7.

Falls $\tilde{g}$ einen Fixpunkt hat (z.B. falls $\tilde{g}$ kontrahierend ist), können wir den Abstand der Lösungen mit folgendem Satz abschätzen:

S. 3. 5.

Sei $D \subset R_+^n$ und $g: D \to D$ kontrahierend mit $\lambda < 1$. Sei $\tilde{g}: D \to D$ und gelte für ein $\varepsilon > 0$ und alle $x \in D$:

$$\| g(x) - \tilde{g}(x) \| \le \varepsilon .$$

Sei $\bar{x}^*$ Fixpunkt von g und $\bar{\bar{x}}^*$ Fixpunkt von $\tilde{g}$. Dann gilt:

$$\| \bar{x}^* - \bar{\bar{x}}^* \| \le \frac{\varepsilon}{1-\lambda}.$$

Beweis:

Trivialerweise gilt für alle $\nu \in N$ wegen der Kontraktionseigenschaft von g und S. 3. 4.:

$$\begin{aligned}
\| \bar{x}^* - \bar{\bar{x}}^* \| &\le \| g(\bar{x}^*) - g(\bar{\bar{x}}^*) \| + \| g(\bar{\bar{x}}^*) - \tilde{g}(\bar{\bar{x}}^*) \| \\
&\le \lambda^\nu \| \bar{x}^* - \bar{\bar{x}}^* \| + \varepsilon \sum_{j=0}^{\nu-1} \lambda^j .
\end{aligned}$$

Beim Grenzübergang $\nu \to \infty$ geht der erste Term gegen Null und der zweite gegen $\frac{\varepsilon}{1-\lambda}$. *q. e. d.*

B. 3. 8.

Wenn wir mit der Abbildung $\tilde{g}$ statt mit g iterieren, so benötigen wir eine Abschätzung für den Fehler, den wir dabei machen. Dies liefert der folgende Satz:

S. 3. 6.

Sei $D \subset R_+^n$ und $g: D \to D$ kontrahierend mit $\lambda < 1$. Sei ferner $\tilde{g}: D \to D$, und es gelte für ein $\varepsilon > 0$ und alle $x \in D$:

$$\| g(x) - \tilde{g}(x) \| \leq \varepsilon .$$

Sei x^* Fixpunkt von g und $\overset{=}{x}^{(\nu)} = \tilde{g}(\overset{=}{x}^{(\nu-1)}),\ \nu \in N,$ das Iterationsverfahren von $\tilde{g}$.

Dann gilt

$$\| x^* - \overset{=}{x}^{(\nu)} \| \leq \frac{1}{1-\lambda}(\varepsilon + \lambda^\nu \| \overset{=}{x}^{(0)} - \tilde{g}(\overset{=}{x}^{(0)}) \|, \quad \forall \nu \in N.$$

Beweis:

Sei $\bar{x}^{(0)} = \overset{=}{x}^{(0)}$ und $x^{(\nu)} = g(x^{(\nu-1)})$ für $\nu \in N$. Dann folgt wegen S. 3. 2. und S. 3. 4. für $\nu \in N$:

$$\begin{aligned}
\| x^* - \overset{=}{x}^{(\nu)} \| &\leq \| x^* - \bar{x}^{(\nu)} \| + \| \bar{x}^{(\nu)} - \overset{=}{x}^{(\nu)} \| \\
&\leq \frac{\lambda^\nu}{1-\lambda} \| \overset{=}{x}^{(0)} - g(\overset{=}{x}^{(0)}) \| + \varepsilon \sum_{j=0}^{\nu-1} \lambda^j \\
&\leq \frac{\lambda^\nu}{1-\lambda} \| \overset{=}{x}^{(0)} - \tilde{g}(\overset{=}{x}^{(0)}) \| + \frac{\lambda^\nu}{1-\lambda} \| \tilde{g}(\overset{=}{x}^{(0)}) - g(\overset{=}{x}^{(0)}) \| + \varepsilon \sum_{j=0}^{\nu-1} \lambda^j \\
&\leq \frac{\lambda^\nu}{1-\lambda} \| \overset{=}{x}^{(0)} - \tilde{g}(\overset{=}{x}^{(0)}) \| + \frac{\lambda^\nu}{1-\lambda} \varepsilon + \varepsilon \sum_{j=0}^{\nu-1} \lambda^j \\
&= \frac{\lambda^\nu}{1-\lambda} \| \overset{=}{x}^{(0)} - \tilde{g}(\overset{=}{x}^{(0)}) \| + \varepsilon \left(\frac{\lambda^\nu}{1-\lambda} + \frac{1-\lambda^j}{1-\lambda} \right) \\
&= \frac{\lambda^\nu}{1-\lambda} \| \overset{=}{x}^{(0)} - \tilde{g}(\overset{=}{x}^{(0)}) \| + \varepsilon \frac{1}{1-\lambda} \\
&= \frac{\lambda^\nu}{1-\lambda} \left(\varepsilon + \lambda^\nu \| \overset{=}{x}^{(0)} - \tilde{g}(\overset{=}{x}^{(0)}) \| \right).
\end{aligned}$$

q. e. d.

B. 3. 9.

In den nächsten Sätzen geben wir Bedingungen an, aus denen folgt, dass eine Abbildung kontrahierend ist.

Wir beginnen mit einem Satz, der Auskunft über die Lösungsmöglichkeit eines statischen Verflechtungsmodells mit nichtlinearen Aufwandsfunktionen gibt, dessen Iterationsverfahren

$g \equiv b + y$ zu einer kontrahierenden Abbildung „ähnlich" ist.

S. 3. 7

Sei $D \subset R^n$ abgeschlossen, $g : D \to R^n$ eine Abbildung mit $h : D \to D$. Sei ferner $g(D) \subset D$ ein Homomorphismus, so dass die Abbildung $h^{-1} \circ g \circ h$ kontrahierend ist.

Dann hat g genau einen Fixpunkt $x*$ und das Iterationsverfahren

$$x^{(\nu)} := g(x^{(\nu)}), \;\; \nu \in N \cup \{0\},$$

konvergiert für ein beliebiges $x^{(0)} \in D$ gegen $x*$.

Beweis:

Die Abbildung $h^{-1} \circ g \circ h$ ist kontrahierend und bildet D in sich ab, besitzt also nach dem Kontraktionssatz S. 2. 7. einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $\tilde{x}*$. Aus $h^{-1} \circ g \circ h(\tilde{x}*) = \tilde{x}*$ folgt $g(h(\tilde{x}*)) = h(\tilde{x}*)$. $h(\tilde{x}*)$ ist also der eindeutig bestimmte Fixpunkt von g. Das Iterationsverfahren

$$\tilde{x}^{(\nu+1)} := h^{-1} \circ g \circ h(\tilde{x}^{(\nu)}), \quad \nu \in N \cup \{0\},$$

konvergiert für alle $\tilde{x}^{(0)} \in D$ gegen $\tilde{y}*$. Weil h Homomorphismus ist, konvergiert dann auch

$$\begin{aligned} x^{(\nu+1)} &:= h(\tilde{x}^{(\nu+1)}) \\ &= g(h(\tilde{x}^{(\nu)})) \\ &= g(x^{(\nu)}) \end{aligned}$$

für alle $x^{(0)} = h(\tilde{x}^{(0)}) \in D$ gegen $x* := h(\tilde{x}*)$. *q. e. d.*

B. 3. 10.

Die Voraussetzungen des Satzes S. 3. 7. sind speziell erfüllt, wenn der Homomorphismus h durch eine invertierbare, nichtnegative Diagonalmatrix gegeben ist. Analog wie im Kapitel I kann man den Übergang von g zu $h^{-1} \circ g \circ h$ als Wahl neuer Maßeinheiten für die Produkte deuten.

S. 3. 8.

Sei $D \subset R^n$ konvex und die Abbildung $b: D \to R^n$ stetig differenzierbar (B. 15.).

Dann gilt:

$$\left\langle \left\| \frac{db}{dx}(x) \right\| \le \lambda < 1, \forall x \in D \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \text{(B. 10.).}$$

Beweis:

Nach einem Mittelwertsatz gilt für alle $x^1, x^2 \in D$:

$$\| b(x^1) - b(x^2) \| \le \sup_{0 \le \alpha \le 1} \left\| \frac{db}{dx}(x^1 + \alpha(x^2 - x^1)) \right\| \cdot \left\| x^1 - x^2 \right\|,$$

woraus nach Voraussetzung folgt

$$\| b(x^1) - b(x^2) \| \le \lambda \left\| x^1 - x^2 \right\|, \quad \lambda < 1.$$ *q. e. d.*

B. 3. 11.

Nach S. 3. 8. muss man also erreichen, dass eine Norm der Jacobischen Matrix der Aufwandsfunktion kleiner oder gleich einer reellen Zahl $\lambda < 1$ ist.

S. 3. 9.

Sei $D \subset R^n$ konvex und die Abbildung $b: D \to R^n$ stetig differenzierbar. Ferner gebe es ein $\tilde{x} \in D$, so dass

$$\left(E - \frac{db}{dx}(\tilde{x}) \right) \in M_M$$

ist und

$$\frac{db}{dx}(\tilde{x}) \ge \frac{db}{dx}(x) \ge 0, \quad \forall x \in D,$$

gilt. Dann ist b kontrahierend.

Beweis:

Wegen $\left(E - \frac{db}{dx}(\tilde{x}) \right) \in M_M$ existiert eine nichtsinguläre, nichtnegative Diagonalmatrix P, so dass gilt

$$\left\| P^{-1} \frac{db}{dx}(\tilde{x}) P \right\|_\infty < 1.$$

Aus (3. 2.) folgt wegen $P, P^{-1} \geq 0$

$$P^{-1} \frac{db}{dx}(\tilde{x}) P \geq P^{-1} \frac{db}{dx}(x) P \geq 0, \ \forall x \in D.$$

Damit erhält man:

$$1 > \left\| P^{-1} \frac{db}{dx}(\tilde{x}) P \right\|_\infty$$

$$\geq \left\| P^{-1} \frac{db}{dx}(x) P \right\|_\infty , \quad \forall x \in D.$$

Damit haben wir eine Norm gefunden, in der die Voraussetzung von S. 3. 8. erfüllt ist. Die Abbildung b ist also kontrahierend. *q. e. d.*

B. 3. 12.

In B. 2. 8. wurde bereits angedeutet, dass das Verfahren der sukzessiven Approximation VSA nicht nur für $x^{(0)} := y$ konvergiert.

S. 3. 10

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) mit (B. 7.) und (B. 8.). Zur Lösung dieses Problems sei folgendes Iterationsverfahren (das Verfahren der sukzessiven Approximation II – VSA II) vorgeschlagen:

i) $\tilde{x}^{(0)} := 0$ (VSA II)

ii) $\tilde{x}^{(\nu)} := b(\tilde{x}^{(\nu-1)}) + y, \quad \nu \in N.$

Unter der Bedingung

$$\exists \text{ ein } x^+ \in R^n_+ : f(x^+) \geq y \tag{B. 25.}$$

gilt:

$$\left\langle \{\tilde{x}^{(\nu)}\}, \ \nu \in N \cup \{0\} : \text{ VSA II ist konvergent} \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left\langle \text{(P.2.1'.) ist global lösbar und } \tilde{x}^* := \lim_{\nu \to \infty} \tilde{x}^{(\nu)} \text{ ist e i n e Lösung von (P. 2. 1'.)} \right\rangle$$

Beweis:

($\Rightarrow$):

Analog dem Beweis von S. 2. 2. ($\Rightarrow$).

($\Leftarrow$):

Dieser Teil wird durch zwei Behauptungen bewiesen:

Behauptung 1:

Es gilt

$$\tilde{x}^{(\nu+1)} \geq \tilde{x}^{(\nu)} \geq 0, \quad \nu \in N \cup \{0\}.$$

Beweis der Behauptung 1 durch Induktion:

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{(1)} &= b(0) + y && (\because \text{(VSA II, i)}) \\ &\geq 0 \\ &= \tilde{x}^{(0)}. \end{aligned}$$

Induktionsschritt:

Mit der Induktionshypothese

$$\tilde{x}^{(\nu)} \geq \tilde{x}^{(\nu-1)} \geq 0, \quad \nu \in N \cup \{0\},$$

folgt

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{(\nu+1)} - \tilde{x}^{(\nu)} &= b(\tilde{x}^{(\nu)}) - b(\tilde{x}^{(\nu-1)}) && (\because \text{(VSA II)}) \\ &\geq 0, && (\because \text{(B. 7.)}) \end{aligned}$$

d.h.

$$\tilde{x}^{(\nu+1)} \geq \tilde{x}^{(\nu)} \geq 0, \quad \nu \in N \cup \{0\}.$$

Behauptung 2:

Es gilt

$$\tilde{x}^{(\nu)} \leq \tilde{x}^*, \quad \nu \in N \cup \{0\}.$$

Beweis der Behauptung 2 durch Induktion:

Induktionsanfang:

$$\tilde{x}^{(0)} = 0 \leq x^+ \qquad (\because x^+ \in R_+^n)$$

Induktionsschritt:

Mit der Induktionshypothese

$$\tilde{x}^{(\nu)} \leq x^{+}$$

folgt:

$$\tilde{x}^{(\nu+1)} = b(\tilde{x}^{(\nu)}) + y$$

$$\leq b(\tilde{x}^{(\nu)}) + f(x^{+})$$ (∵ (B. 25.))

$$= b(\tilde{x}^{(\nu)}) + x^{+} - b(x^{+})$$ (∵ $f(x^{+}) = x^{+} - b(x^{+})$)

$$\leq x^{+}.$$ (∵ (B. 7.))

Damit ist Behauptung 2 bewiesen.

Da eine monoton wachsende nach oben beschränkte Folge konvergiert, ist mit diesen beiden Behauptungen Teil ($\Leftarrow$) bewiesen. *q. e. d.*

S. 3. 11.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) mit (B. 7.) und (B. 8.) und (B. 25.). Zur Lösung dieses Problems sei folgendes Iterationsverfahren (das Verfahren der sukzessiven Approximation III – VSA III) vorgeschlagen:

i) $\bar{x}^{(0)} := x^{+} \ (x^{+} \in R_{+}^{n} : f(x^{+}) \geq y)$ (VSA II)

ii) $\bar{x}^{(\nu)} := b(\bar{x}^{(\nu-1)}) + y, \quad \nu \in N.$

Es gelte:

$$\left\langle \{\bar{x}^{(\nu)}\},\ \nu \in N \cup \{0\}: \text{ VSA III ist konvergent} \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left\langle \text{(P.2.1'.) ist global lösbar und } \bar{x}^{*} := \lim_{\nu \to \infty} \bar{x}^{(\nu)} \text{ ist e i n e Lösung von (P. 2. 1'.)} \right\rangle.$$

Beweis:

($\Rightarrow$):

Analog dem Beweis von S. 2. 2. ($\Rightarrow$).

($\Leftarrow$):

Dieser Teil wird durch zwei Behauptungen bewiesen:

Behauptung 1:

Es gilt

$$\bar{x}^{(\nu+1)} \leq \bar{x}^{(\nu)}.$$

Beweis der Behauptung 1 durch Induktion:

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(1)} &= b(x^+) + y \\ &\leq b(x^+) + f(x^+) && (\because \text{ (B. 25.)}) \\ &= b(x^+) + x^+ - b(x^+) && (\because f(x^+) = x^+ - b(x^+)) \\ &= x^+. \end{aligned}$$

Induktionsschritt:

Mit der Induktionshypothese

$$\bar{x}^{(\nu)} \leq \bar{x}^{(\nu-1)}$$

folgt

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(\nu+1)} &= b(\bar{x}^{(\nu)}) + y \\ &\leq b(\bar{x}^{(\nu-1)}) + y && (\because \text{ (B. 7)}) \\ &= \bar{x}^{(\nu)}. \end{aligned}$$

Damit ist Behauptung 1 bewiesen.

Behauptung 2:

Es gilt

$$\bar{x}^{(\nu)} \leq \bar{x}^*, \quad \nu \in N \cup \{0\}.$$

Beweis der Behauptung 2 durch Induktion:

Wir zeigen (indirekt), dass

$$x^+ \geq \bar{x}^*; \qquad \bar{x}^* := b(\bar{x}^*) + y$$

gilt:

Induktionsanfang:

Es gelte entgegen der Behauptung

$$x^{+} < \bar{x}^{*}.$$

Dann gilt wegen (B. 7.)

$$b(x^{+}) \leq b(\bar{x}^{*}). \qquad (3.\ 3.)$$

Andererseits gilt wegen $y \leq x^{+} - b(x^{+})$:

$$\begin{aligned} \bar{x}^{*} &= b(\bar{x}^{*}) + y \\ &\leq b(\bar{x}^{*}) + x^{+} - b(x^{+}) \\ &\leq x^{+}, && (\because\ (3.\ 3.)) \end{aligned}$$

entgegen der Annahme. Daher die Behauptung.

Induktionsschritt:

Mit der Induktionshypothese

$$\bar{x}^{(\nu)} \geq \bar{x}^{*} \qquad (3.\ 4.)$$

folgt:

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(\nu+1)} &= b(\bar{x}^{(\nu)}) + y \\ &= b(\bar{x}^{(\nu)}) + f(\bar{x}^{*}) \\ &= b(\bar{x}^{(\nu)}) + \bar{x}^{*} - b(\bar{x}^{*}) \\ &\geq \bar{x}^{*}. && (\because\ (3.\ 4.), (B.\ 7.)) \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung 2 bewiesen. Da eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergiert, ist Teil $(\Rightarrow)$ auch bewiesen. *q. e. d.*

B. 3. 13.

Bedingung (B. 25.) besagt: Für eine Gesamtproduktion wird mindestens eine Endnachfrage realisiert.

B. 3. 14.

Bedingung (B. 25.) ist zwar für die Konvergenz der Verfahren VSA II und VSA III unerlässlich, wird aber beim Verfahren VSA II nur für den Nachweis der Beschränktheit der Folge $\{\tilde{x}^{(\nu)}\}, \nu \in N \cup \{0\}$, benötigt. Dagegen braucht man sie beim Verfahren VSA III auch für den Nachweis der Monotonie der Folge $\{\bar{x}^{(\nu)}\}, \nu \in N \cup \{0\}$.

S. 3. 12.

$$\Big\langle \text{(P. 2. 1'.) hat eine mehrdeutige Lösung für ein } y \in R_+^n \Big\rangle$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Big\langle \lim_{\nu\to\infty} \tilde{x}^{(\nu)} := \tilde{x}^* \leq \bar{x}, \quad \bar{x}: \text{ eine beliebige Lösung für dieses } y \Big\rangle.$$

Beweis:

Es gilt:

$$\bar{x} = b(\bar{x}) + y \tag{3. 5.}$$

$$\geq y. \qquad (\because\ b(\bar{x}) \in R_+^n) \tag{3. 6.}$$

Wir zeigen nun, dass $\bar{x}$ eine obere Schranke der nach VSA II definierten Folge $\{\bar{x}^{(\nu)}\}, \nu \in N \cup \{0\}$ ist (Induktion):

Es gilt:

$$\tilde{x}^{(1)} = b(0) + y$$

$$\leq b(\bar{x}) + y \qquad (\because\ \text{(3. 5.), (B. 7.)})$$

$$= \bar{x}. \qquad (\because\ \text{(3. 5.)})$$

Es gelte die Induktionshypothese

$$\tilde{x}^{(\nu)} \leq \bar{x}. \tag{3. 7.}$$

Dann gilt:

$$\tilde{x}^{(\nu+1)} \leq b(\tilde{x}^{(\nu)}) + y \tag{3. 8.}$$

$$\leq b(\bar{x}) + y \qquad (\because\ \text{(3. 5.), (B. 7.)})$$

$$= \bar{x}. \qquad (\because\ \text{(3. 5.)})$$

Es gilt ferner

$$\lim_{\nu\to\infty} \tilde{x}^{(\nu)} \leq \lim_{\nu\to\infty} \bar{x}, \qquad (\because\ \text{(3. 5.)})$$

d. h.

$\tilde{x}^* \leq \bar{x}.$ *q. e. d.*

B. 3. 15.

Nach Satz S. 3. 12. besitzt VSA II die gleiche „Minimaleigenschaft“ wie VSA I. [vgl. S. 2. 3. und B. 2. 7.]

S. 3. 13.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1.’). Es gelten die Bedingungen (B. 7.), (B. 8.) und (B. 25.).

$$\left\langle \begin{array}{l} \text{(P. 2. 1'.) hat eine mehrdeutige Lösung im Intervall } \left[0,\ x^+\right] \\ \text{für ein festes } y \in R_+^n \end{array} \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{\nu\to\infty} \overset{\approx}{x}^{(\nu)} := \overset{\approx}{x}^* \geq x, \quad x: \text{ eine beliebige Lösung} \\ \text{von (P. 2. 1'.) für dieses } y \end{array} \right\rangle.$$

Beweis:

Aus dem Beweis von S. 3. 11., Teil $(\Leftarrow)$, Behauptung 2 folgt für alle $x \in R_+^n,\ x \leq x^*$ mit $f(x) = y$:

$$\overset{\approx}{x}^{(\nu)} \geq x, \quad \forall \nu \in N \cup \{0\}.$$

Daraus folgt für alle $x \in R_+^n$ mit $x \leq x^+$ mit $f(x) = y$:

$$\overset{\approx}{x}^* := \lim_{\nu\to\infty} \overset{\approx}{x}^{(\nu)} \geq x.$$ *q. e. d.*

B. 3. 16.

Durch die Kombination der Iterationsverfahren VSA I und VSA III bzw. VSA II und VSA III erhält man für alle Gesamtproduktionen $x \in \left[0,\ x^+\right]$ mit $f(x) = y$ die Abschätzungen

$$x^{(\nu)} \leq x \leq \overset{\approx}{x}^{(\nu)}, \quad \forall \nu \in N \cup \{0\} \tag{3. 9.}$$

bzw.

$$\tilde{x}^{(\nu)} \leq x \leq \overset{\approx}{x}^{(\nu)}, \quad \forall \nu \in N \cup \{0\}. \tag{3. 10.}$$

Die Abschätzungen (3. 9.) bzw. (3. 10.) sind für die praktische Durchführung der Iteration von besonderem Interesse, wenn es im Intervall $\left[0,\ x^+\right]$ nur eine einzige Gesamtproduktion x existiert, die die vorgegebene Endnachfrage realisiert. Dann gilt nämlich:

$$\lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)} = x = \lim_{\nu\to\infty} \overset{\approx}{x}^{(\nu)} \qquad (3.\ 11.)$$

bzw.

$$\lim_{\nu\to\infty} \tilde{x}^{(\nu)} = x = \lim_{\nu\to\infty} \overset{\approx}{x}^{(\nu)} . \qquad (3.\ 12.)$$

B. 3. 17.

Im Folgenden werden die Verfahren VSA I – III modifiziert, um eine Konvergenzbeschleunigung zu erzielen. Es lässt sich nämlich zeigen, dass VSA I – III genau dann konvergieren, wenn die modifizierten Verfahren MVSA – III konvergieren. Beide haben dann denselben Grenzwert, aber in Bezug auf die Konvergenzgeschwindigkeit sind die Verfahren MVSA I – III die besseren.

S. 3. 14.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) mit (B. 7.) und (B. 8.). Zur Lösung dieses Problems sei folgendes Iterationsverfahren (das *modifizierte Verfahren der sukzessiven Approximation I – MVSA I*) vorgeschlagen:

i) $z_i^{(0)} := y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$ (VSA II)

ii) $z_i^{(\nu)} := y_i + b_i(z_1^{(\nu)} \ldots z_{i-1}^{(\nu)}\ z_i^{(\nu-1)} \ldots z_n^{(\nu-1)})^T, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad \nu \in N.$

Dann gilt:

A. Die durch MVSA I definierte Folge ist monoton wachsend und konvergent.
B. $z^{(\nu)} \geq x^{(\nu)}, \quad \nu \in N \cup \{0\}$
C. $\lim_{\nu\to\infty} z^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)}$

Beweis:

A.

Dieser Teil wird durch zwei Behauptungen bewiesen:

Behauptung 1:

Es gilt

$$z^{(\nu+1)} \geq z^{(\nu)}, \quad \nu \in N \cup \{0\}.$$

Beweis der Behauptung 1 durch Induktion:

Induktionsanfang:

$$z_i^{(1)} = y_i + b_i(z_1^{(1)} \ldots z_{i-1}^{(1)}\ z_i^{(0)} \ldots z_n^{(0)})^T$$

$$\geq y_i = x_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n . \qquad (\because y_i \in R_+^1;\ b_i(z) \in R_+^1)$$

Induktionsschritt:

Mit der Induktionshypothese

$$z^{(\nu)} \geq z^{(\nu-1)}$$

folgt durch eine zweite Induktion über i :

$$(i=1): \quad z_1^{(\nu+1)} = y_1 + b_1(z^{(\nu)})$$

$$\geq y_1 + b_1(z^{(\nu-1)}) \qquad (\because (\text{B. } 7.))$$

$$= z_1^{(\nu)};$$

$$(i=i+1): \quad z_{i+1}^{(\nu+1)} = y_{i+1} + b_{i+1}(z_1^{(\nu+1)} \ldots z_{i-1}^{(\nu+1)} \; z_i^{(\nu)} \ldots z_n^{(\nu)})^T$$

$$\geq y_{i+1} + b_{i+1}(z_1^{(\nu)} \ldots z_i^{(\nu)} \; z_{i+1}^{(\nu-1)} \ldots z_n^{(\nu-1)})^T$$

$$(\because z_j^{(\nu+1)} \geq z_j^{(\nu)}, \; j=1,2,\ldots,i, \wedge z_j^{(\nu)} \geq z_j^{(\nu-1)}, \; j=1,2,\ldots,n)$$

$$= z_{i+1}^{(\nu)}.$$

Daraus folgt:

$$z_i^{(\nu+1)} \geq z_i^{(\nu)}, \quad i=1,2,\ldots,n,$$

und damit

$$z^{(\nu+1)} \geq z^{(\nu)}.$$

Behauptung 1 ist damit bewiesen.

Behauptung 2:

Sei

$$x^* := \lim_{\nu \to \infty} x^{(\nu)}$$

(wobei durch S. 2. 2. die Existenz von x^* gesichert ist).

Dann gilt für alle $\nu \in N \cup \{0\}$:

$$z^{(\nu)} \leq x^*.$$

Beweis der Behauptung 2 durch Induktion:

Induktionsanfang:

$$z^{(0)} = y$$

$$\leq x^*.$$

Induktionsschritt:

Mit der Induktionshypothese

$$z^{(\nu)} \le x*$$

folgt durch eine zweite Induktion über i:

$$(i=1): \qquad z_1^{(\nu+1)} = y_1 + b_1(z^{(\nu)})$$

$$\le y_1 + b_1(x*) \qquad (\because \text{ (B. 7.)})$$

$$= x* \qquad (\because f(x*) = x* - b(x*) = y)$$

$$(i=i+1): \quad z_{i+1}^{(\nu+1)} = y_{i+1} + b_{i+1}\left(z_1^{(\nu+1)} \dots z_i^{(\nu+1)} z_{i+1}^{(\nu)} \dots z_n^{(\nu)}\right)^T$$

$$\le y_{i+1} + b_{i+1}(x*) \qquad (\because z_j^{(\nu+1)} \le x*,\ j=1,2,\dots,i \wedge z_j^{(\nu)} \le x_j^*,\ j=1,2,\dots,n)$$

$$= x_{i+1}^*.$$

Damit folgt $z^{(\nu+1)} \le x*$ und Behauptung 2 ist bewiesen.

Da eine monoton wachsende nach oben beschränkte Folge konvergent ist, ist mit diesen Beiden Behauptungen Teil A bewiesen.

B.

Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang:

$$z^{(0)} = y \ge y = x^{(0)}.$$

Induktionsschritt:

Mit der Induktionshypothese $z^{(\nu)} \ge x^{(\nu)}$ folgt für $i=1,2,\dots,n$:

$$z_i^{(\nu+1)} = y_i + b_i(z_i^{(\nu+1)} \dots z_{i-1}^{(\nu+1)} z_i^{(\nu)} \dots z_n^{(\nu)})$$

$$\ge y_i + b_i(z_1^{(\nu)} \dots z_n^{(\nu)}) \qquad (\because \text{ A, Behauptung 1})$$

$$= y_i + b_i(z^{(\nu)})$$

$$\ge y_i + b_i(x^{(\nu)}) \qquad (\because x^{(\nu)} \le z^{(\nu)})$$

$$= x_i^{(\nu+1)}.$$

Damit ist Teil B bewiesen.

C.

Aus Teil A, Behauptung 2 folgt:

$$z^{(\nu)} \le \lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)}.$$

Damit gilt

$$\lim_{\nu\to\infty} z^{(\nu)} \le \lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)}.$$

Aus Teil B folgt

$$\lim_{\nu\to\infty} z^{(\nu)} \ge \lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)}.$$

Damit ist Teil C bewiesen. *q. e. d.*

S. 3. 15.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) mit (B. 7.), (B. 8.) und (B. 25.).

Zur Lösung dieses Problems sei folgendes Iterationsverfahren (das *modifizierte Verfahren der sukzessiven Approximation II – MVSA II*) vorgeschlagen:

i) $z_i^{(0)} := 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$ (VSA II)

ii) $z_i^{(\nu)} := y_i + b_i(z_1^{(\nu)} \dots z_{i-1}^{(\nu)}\ z_i^{(\nu-1)} \dots z_n^{(\nu-1)})^T, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \nu \in N.$

Dann gilt:

A. Die durch (MVSA II) definierte Folge ist monoton wachsend und konvergent.

B. $\tilde{z}^{(\nu)} \ge \tilde{x}^{(\nu)}, \quad \nu \in N \cup \{0\}$

C. $\lim_{\nu\to\infty} \tilde{z}^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} \tilde{x}^{(\nu)}$

Beweis:

Analog dem Beweis von S. 3. 14.

S. 3. 16

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) mit (B. 7.), (B. 8.) und (B. 25.). Zur Lösung dieses Problems sei folgendes Iterationsverfahren ((das *modifizierte Verfahren der sukzessiven Approximation III – MVSA III*) vorgeschlagen:

i) $\overset{\approx}{z}_i^{(0)} := x_i^+, \quad i = 1, 2, \dots, n,$ mit $f(x^+) \ge y$ (VSA II)

ii) $\overset{\approx}{z}_i^{(0)} := y_i + b_i(\overset{\approx}{z}_i^{(0)} \dots \overset{\approx}{z}_{i-1}^{(\nu)}\ \overset{\approx}{z}_i^{(\nu-1)} \dots \overset{\approx}{z}_n^{(\nu-1)})^T, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \nu \in N.$

Dann gilt:

D. Die durch (MVSA III) definierte Folge ist monoton wachsend und konvergent.

E. $\overset{\approx}{z}^{(\nu)} \ge \overset{\approx}{x}^{(\nu)}, \quad \nu \in N \cup \{0\}$

F. $\lim_{\nu\to\infty} \overset{\approx}{z}^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} \overset{\approx}{x}^{(\nu)}$

Beweis:

Analog dem Beweis von S. 3. 14.

B. 3. 18.

Die Verfahren MVSA I – MVSA III stellen Verallgemeinerungen des Gauß-Seidelschen Verfahrens zur Lösung von linearen Gleichungssystemen dar.

Es ist licht zu sehen, dass die Reihenfolge der Nummerierung der Sektoren für die Konvergenzgeschwindigkeit der Verfahren MVSA I – III von entscheidender Bedeutung ist.

Im Falle einer sog. „zyklenfreien“ Aufwandsfunktion lässt sich durch geeignete Nummerierung stets erreichen, dass

$$b_{ij}(x_j) = 0, \text{ für } i \leq j;\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

gilt. Für diesen Spezialfall kann man die gesuchte Gesamtproduktion nach MVSA I – III nach einem Schritt erhalten.

S. 3. 17.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1′.) mit (B. 3.), (B. 15.) – (B. 17.) und (B. 18.) (bzw. (2. 29.)). Sei $\frac{df}{dx}(0) \in M_M$.

Dann ist das Problem (P. 2. 1′.) eindeutig global lösbar und das Newtonsche Verfahren

$$x^{(\nu)} := x^{(\nu-1)} - \left(\frac{df}{dx}(x^{(\nu-1)})\right)^{-1} \left(f(x^{(\nu-1)}) - y\right), \quad \nu \in N \tag{NV}$$

konvergiert für jedes $x^{(0)} \in R_+^n$ gegen die Lösung x^* des Problems (P. 2. 1.′)

Dabei gilt

$$x^{(\nu)} \geq x^{(\nu-1)} \geq x^*, \ \forall \nu \in N.$$

Beweis:

Sei $y \in R_+^n$ und $\tilde{f} : R^n \to R^n$ eine Fortsetzung von f, die analog zu der im Beweis von S. 2. 16.

konstruiert ist. Sei $t : R^n \to R^n$ definiert durch $t(x) = \tilde{f}(x) - y$.

Dann ist t stetig differenzierbar und konvex auf R^n. Wegen

$$\frac{dt}{dx}(x) = \frac{d\tilde{f}}{dx}(x) = E - \frac{d\tilde{b}}{dx}(x)$$

$$\geq E - \frac{db}{dx}(0) = \frac{df}{dx}(0), \quad \forall x \in R^n,$$

folgt, dass $\frac{dt}{dx}(x)$ für alle $x \in R^n$ eine M – Matrix ist. Also ist $\frac{dt}{dx}(x)$ nicht singulär und $\left(\frac{dt}{dx}(x)\right)^{-1} \geq 0$ für alle $x \in R^n$. Der Satz S. 2. 16. sichert die Existenz eines $x^* \in R_+^n$ mit $f(x) = y$ mit $t(x) = 0.$

Unter diesen Voraussetzungen ist die Lösung $x \in R_+^n$ eindeutig bestimmt und das Newtonverfahren

$$x^{(\nu)} := x^{(\nu-1)} - \left(\frac{dt}{dx}(x^{(\nu-1)})\right)^{-1} t(x^{(\nu-1)}), \quad \nu \in N \tag{NV'}$$

konvergiert für jedes $x^{(0)} \in R_+^n$ gegen x^*.

Weiter gilt

$$x^{(\nu)} \geq x^{(\nu+1)} \geq x^*, \ \forall \nu \in N,$$

weswegen die obige Iterationsvorschrift (NV') folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$x^{(\nu)} := x^{(\nu-1)} - \left(\frac{dt}{dx}(x^{(\nu-1)})\right)^{-1} \left(f(x^{(\nu-1)}) - y \right), \quad \nu \in N .$$

q. e. d.

S. 3. 18.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) bzw. das Problem

$$x = b_y(x) \tag{2. 34.}$$

mit

$$b_y(x) = b(x) + y, \quad y \in R_+^n, \tag{2. 32.}$$

wobei die in (S. 2. 20.) angegebenen Bedingungen gelten mögen.

Ferner möge $b'(x)$ monoton (fallend) von x abhängen.

Zur Lösung des Problems (2. 33.) sei folgendes Verfahren (das *modifizierte Newtonverfahren – MNVI*) vorgeschlagen:

$$\begin{aligned} &\text{i) } x^{(0)} := x^0 > 0: \quad b_y(x^0) \leq \lambda x^0 \\ &\text{ii) } x^{(\nu)} := b_y(x^{(\nu-1)}) + b'(x^0)(x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}), \quad \nu \in N. \end{aligned} \tag{MNV}$$

Dann ist die nach (MNV) konstruierte Folge $\left\{x^{(\nu)}\right\}, \ \nu \in N \cup \{0\}$ monoton wachsend und konvergiert gegen die eindeutige Lösung x^* der Gleichung (2. 34.)

Beweis:

Die in S. 2. 20. angegebenen Bedingungen sichern die Existenz der eindeutigen Lösung von (P. 2. 1'.)

Es wird nun gezeigt, das für den Spektralradius der Abbildung $b'(x)$ gilt:

$$r\left[b'(x^0)\right] < 1.$$

Man hat nämlich

$$\lambda x^0 \geq b(x^0) \qquad (\because \text{ (B. 19.)})$$

$$\geq b'(x^0)x^0 \qquad (\because \text{ (2. 31.)})$$

Daraus resultiert [Vgl. Krasnoselski, M. A. u. a.: Näherungsverfahren zur Lösung von Operatorgleichungen, Akademie-Verlag, Berlin 1973]:

$$r\left[b'(x^0)\right] \leq \lambda \qquad (3.\ 13.)$$

$$< 1.$$

Die Ungleichung (3. 13.) sichert, dass die Folge $\left\{x^{(\nu)}\right\},\ \nu \in N \cup \{0\}$ durch die Formel (MNV) eindeutig bestimmt ist.

Sei nun $x^{(0)} \geq 0,\ x^{(0)} = t_0 x^0$, wobei t_0 die Bedingung (2. 26.) erfüllt. Es kann leicht bewiesen werden [Vgl. den Beweis von S. 2. 18. $(\Rightarrow)$ (2. 35.)], dass

$$b_y(x^{(0)}) \leq x^{(0)} \qquad (3.\ 14.)$$

gilt.

Setzt man in (MNV ii) $\nu = 1$ ein, so folgt:

$$x^{(1)} = b_y(x^{(0)}) + b'(x^0)\left(x^{(1)} - x^{(0)}\right)$$

$$\leq x^{(0)} + b'(x^0)(x^{(1)} - x^{(0)}), \qquad (\because \text{ (3. 14.)})$$

d.h.

$$(E - b'(x^0))(x^{(1)} - x^{(0)}) \leq 0.$$

Da $b'(x^0)$ ein positiver Operator ist und unter Berücksichtigung von (3. 13.) gilt nun:

$$x^{(1)} \leq x^{(0)}. \qquad (3.\ 15.)$$

Ferner gilt:

$$x^* = b_y(x^*)$$

$$\leq b_y(x^{(0)}) + b'(x^{(0)})(x^* - x^{(0)}) \qquad (\because \text{ (2. 33.)})$$

$$= b_y(x^{(0)}) + b'(x^{(0)})(x^{(1)} - x^{(0)}) + b'(x^{(0)})(x^* - x^{(0)})$$

$$= x^{(1)} + b'(x^{(0)})(x^* - x^{(0)})$$

$$\leq x^{(1)} + b'(x^{(0)})(x^* - x^{(1)}), \qquad (\because \text{ (3. 15.)})$$

d.h.

$$(E - b'(x^{(0)}))(x^* - x^{(1)}) \le 0. \tag{3. 16.}$$

Man hat ferner

$$b(x^{(0)}) + y \le x^{(0)}, \qquad (\because (3.\ 14.)) \tag{3. 17.}$$

d.h.

$$x^{(0)} > b(x^{(0)}) \qquad (\because (3.\ 17.))$$

$$\ge b'(x^{(0)})x^{(0)}.$$

Aus der letzten Ungleichung folgt, wie beim Beweis von S. 2. 20., dass

$$r\left[b'(x^{(0)})\right] < 1$$

ist woraus unter Berücksichtigung von (3. 16.)

$$x^* \le x^{(1)}$$

resultiert.

Man erhält ferner:

$$x^{(2)} = b_y(x^{(1)}) + b'(x^0)(x^{(2)} - x^{(1)})$$

$$\le b_y(x^{(0)}) + b'(x^{(0)})(x^{(1)} - x^{(0)}) + b'(x^0)(x^{(2)} - x^{(1)})$$

$$\le b_y(x^{(0)}) + b'(x^0)(x^{(1)} - x^{(0)}) + b'(x^0)(x^{(2)} - x^{(1)})$$

$$= x^{(1)} + b'(x^0)(x^{(2)} - x^{(1)})$$

$$(E - b'(x^0))(x^{(2)} - x^{(1)}) \le 0,$$

$$x^{(2)} \le x^{(1)}.$$

Analog gilt:

$$x^* = b_y(x^*)$$

$$\le b_y(x^{(1)}) + b'(x^{(1)})(x^* - x^{(1)})$$

$$= b_y(x^{(1)}) + b'(x^{(1)})(x^{(2)} - x^{(1)}) + b'(x^{(1)})(x^* - x^{(2)})$$

$$\le b_y(x^{(1)}) + b'(x^0)(x^{(2)} - x^{(1)}) + b'(x^1)(x^* - x^{(2)})$$

$$= x^{(2)} + b'(x^1)(x^* - x^{(2)}),$$

$$(E - b'(x^{(0)}))(x^* - x^{(2)}) \le 0. \tag{3. 18.}$$

Wegen $x^* \le x^{(1)}$ hat man $b'(x^{(1)}) \le b'(x^*)$ und daher [Vgl. Krasnoselski, M. A. u. a.: Näherungsverfahren zur Lösung von Operatorgleichungen, Akademie-Verlag. Berlin 1973]:

$$r\left[b'(x^{(1)})\right] \leq r\left[b'(x^*)\right].$$

Aus

$$x^* = b_y(x^*)$$

$$= b(x^*) + y$$

$$> b(x^*)$$

$$\geq b'(x^*)x^*$$

und unter Berücksichtigung der Unzerlegbarkeit von b' erhält man

$$r[b'(x^{(1)})] < 1.$$

Damit gilt:

$$r[b'(x^{(1)})] \leq r[b'(x^*)]$$

$$< 1$$

und

$$x^* \leq x^{(2)}, \qquad (\because \ (3.18.))$$

also

$$x^* \leq x^{(2)} \leq x^{(1)} \leq x^{(0)}.$$

Durch analoge Überlegungen lässt sich nach der Methode der vollständigen Induktion zeigen, dass die Folge $\left\{x^{(\nu)}\right\}, \ \nu \in N \cup \{0\}$, monoton fallend ist und eine untere Schranke x^* besitzt.

Aus der Monotonie und Beschränktheit der Folge $\left\{x^{(\nu)}\right\}, \ \nu \in N \cup \{0\}$, folgt deren Konvergenz gegen ein x^*. Geht man in (MNV ii) zum Grenzwert über ($\nu \to \infty$), erhält man $x^* = b_y(x^*)$. Wegen $x^* \geq 0$ und der eindeutigen Lösbarkeit von (P. 2. 1.') unter den gegebenen Bedingungen [Vgl. S. 2. 20.] ist dies die gesuchte Lösung. *q. e. d.*

B. 3. 19.

Bim Verfahren MNV kann man wie beim Beweis von S. 3. 18. angeführt wurde, als Anfangsbedingung $x^{(0)} = t_0 x^0$ wählen, wobei $x^0 > 0$ der Bedingung

$$b(x^0) \leq \lambda x^0, \ \lambda \in [0, 1], \ y \leq t_0 (1-\lambda) x^0. \ t_0 > 0$$

genügen muss.

B. 3. 20.

Die Iterationsvorschrift des modifizierten Newtonschen Verfahrens lässt sich folgendermaßen umschreiben:

$$x^{(\nu)} := \left(E - b'(x^0)\right)^{-1}\left(b_y(x^{(\nu-1)}) - b'(x^0)x^{(\nu-1)}\right), \;\; \nu \in N. \qquad (3.\,19.)$$

Damit hat man die Methode der sukzessiven Approximation $x^{(\nu)} := g(x^{(\nu-1)}), \;\; \nu \in N,$ auf die Abbildung

$$g(x) := \left(E - b'(x^0)\right)^{-1}\left(b_y(x) - b'(x^0)x\right) \qquad (3.\,20.)$$

anzuwenden.

<u>S. 3. 19.</u>

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) bzw. (2. 34.) mit (2. 32.). Ferner seien die in S. 3. 18. gemachten Voraussetzungen erfüllt.

Zur Lösung des Problems (2. 34.) sei folgendes Verfahren (das modifizierte Verfahren von Newton-Kantorovic) vorgeschlagen:

i) $x^{(0)} := x^+ > 0: \quad b_y(x^+) \le x^+,$ (VNK)

ii) $x^{(\nu)} := b_y(x^{(\nu-1)}) + b'(x^{(\nu-1)})(x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}), \quad \nu \in N.$

Dann ist die durch (VNK) beschriebene Folge $\{x^{(\nu)}\}, \;\; \nu \in N$, wohl definiert. Diese Folge konvergiert gegen x^*, welches die Lösung der Gleichung $x = b_y(x)$ darstellt:

$$x^* \le \ldots \le x^{(\nu+1)} \le x^{(\nu)} \le \ldots x^{(1)} \le x^{(0)}. \qquad (3.\,21.)$$

Ist der Operator b zweimal Frechèt-differenzierbar, dann konvergiert $\{x^{(\nu)}\}, \;\; \nu \in N$ quadratisch gegen x^*, d.h.

$$\| x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)} \| \le c \, \| x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)} \|^2 . \qquad (3.\,22.)$$

Hier ist $c > 0$ eine Konstante.

Beweis:

Es gilt:

$$\begin{aligned} x^+ &\ge b_y(x^+) \\ &\ge b(x^+) \\ &\ge b'(x^+)x^+ \end{aligned}$$

und nach dem Satz über die strenge Abschätzung des Spektralradius eines linearen nicht zerlegbaren Operators:

$$r[b'(x^+)] < 1.$$

Damit ist das Element $\tilde{x}^{(1)}$ durch (MNK) für $\nu = 1$ wohl definiert. Analoge Überlegungen wie in S. 3. 18. ergeben

$$x^* \leq \tilde{x}^{(1)} \leq \tilde{x}^{(0)}. \tag{3. 23.}$$

Damit gilt

$$0 \leq b'(\tilde{x}^{(1)}) \leq b'(\tilde{x}^*)$$

und folglich

$$r\left[b'(\tilde{x}^{(1)})\right] \leq r\left[b'(\tilde{x}^*)\right] < 1. \tag{3. 24.}$$

Die Ungleichung (3. 24.) garantiert die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung (MNK ii) für $\nu = 2$, wodurch das Element $\tilde{x}^{(2)}$ wohl definiert ist.

Es wird nun gezeigt, dass

$$x^* \leq \tilde{x}^{(2)} \leq \tilde{x}^{(1)}$$

gilt:

$$x^{(2)} = b_y(\tilde{x}^{(1)}) + b'(\tilde{x}^{(1)})(\tilde{x}^{(2)} - \tilde{x}^{(1)})$$

$$\leq b_y(\tilde{x}^{(0)}) + b'(\tilde{x}^{(0)})(\tilde{x}^{(1)} - \tilde{x}^{(0)}) + b'(\tilde{x}^{(1)})(\tilde{x}^{(2)} - \tilde{x}^{(1)})$$

$$= \tilde{x}^{(1)} + b'(\tilde{x}^{(0)})(\tilde{x}^{(2)} - \tilde{x}^{(1)}),$$

d.h.

$$\left(E - b'(\tilde{x}^{(1)})\right)\left(\tilde{x}^{(2)} - \tilde{x}^{(1)}\right) \leq 0$$

und wegen $\left(E - b'(\tilde{x}^{(1)})\right)^{-1} \geq 0$

$$\tilde{x}^{(2)} \leq \tilde{x}^{(1)}.$$

Es gilt ferner:

$$x^* \leq b_y(x^*)$$

$$\leq b_y(\tilde{x}^{(1)}) + b'(\tilde{x}^{(1)})(x^* - \tilde{x}^{(1)})$$

$$\leq b_y(x^{(1)}) + b'(x^{(1)})(x^{(2)} - x^{(1)}) + b'(x^{(1)})(x^* - x^{(2)})$$

$$= x^{(2)} + b'(x^{(1)})(x^* - x^{(2)})\,,$$

d.h.

$$\left(E - b'(x^{(1)})\right)\left(x^* - x^{(1)}\right) \leq 0\,,$$

$$x^* \leq x^{(2)}\,.$$

Es lässt sich analog zeigen, dass

$$x^* \leq x^{(3)} \leq x^{(2)} \leq x^{(1)}$$

und nach Induktion

$$x^* \leq x^{(\nu+1)} \leq x^{(\nu)} \leq \ldots x^{(1)}\,.$$

Offensichtlich hat man dann

$$\lim_{\nu \to \infty} x^{(\nu)} = x^*.$$

Sei nun

$$M > 0:\ \|b''(x)\| \leq M,\ (x \in [x^*,\ x^+]]. \qquad (3.\,26.)$$

Dann gilt:

$$x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)} = b_y(x^{(\nu)}) - b_y(x^{(\nu-1)}) - b'(x^{(\nu-1)})(x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}) + b'(x^{(\nu)})(x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)})\,,$$

$$x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)} = \left(E - b'(x^{(\nu)})\right)^{-1}\left(b_y(x^{(\nu)}) - b_y(x^{(\nu-1)})\right) - b'\left(x^{(\nu-1)}\right)\left(x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}\right), \qquad (3.\,27.)$$

$$\left\|x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}\right\| \leq \left\|\left(E - b'(x^{(\nu)})\right)^{-1}\right\| \frac{M}{2}\left\|x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}\right\|^2, \qquad (\because\ (3.\,25.\text{-}3.\,27.))$$

$$E - b'(x^*) \leq E - b'(\tilde{x}^{(\nu)}) \leq E - b'(\tilde{x}^{(1)}) \qquad (\because\ 3.\,25.)$$

$$\left(E - b'(\tilde{x}^{(1)})\right)^{-1} \leq \left(E - b'(\tilde{x}^{(\nu)})\right)^{-1} \leq \left(E - b'(x^*)\right)^{-1}$$

$$\left\| \left(E - b'(\overset{\sim (1)}{x}) \right)^{-1} \right\| \le c_0 \max \left\{ \left\| \left(E - b'(\overset{\sim (\nu)}{x}) \right)^{-1} \right\| ; \left\| \left(E - b'(x^*) \right)^{-1} \right\| \right\} \qquad (3.\ 29.)$$

Dabei ist c_0 eine Konstante. Hieraus und unter Berücksichtigung von (3. 28.) folgt, dass es eine Konstante $c > 0$ existiert, für die (3. 22.) gilt.

B. 3. 21.

Im Folgenden wird zur Lösung des Problems (P. 2. 4.) [vgl. D. 2. 4.] ein spezielles Verfahren entwickelt:

Sei

$$r_j := \frac{w_j - z_j}{z_j}, \ j = 1, ..., n, \qquad (3.\ 30.)$$

wobei z_j, $j = 1, ..., n$, eine ganze Zahl „nahe“ an w_j, $j = 1, ..., n$, ist. Es gilt nun nach dem erweiterten Binomiallehrsatz

$$\begin{aligned} w_j^{q_{ij}} &= w_j^{q_{ij}} \left(1 + r_j\right)^{q_{ij}} \\ &= z_j^{q_{ij}} \left(1 + q_{ij} r_j + \binom{q_{ij}}{2} r_j^2 + ... \right), \quad i, j = 1, ..., n. \end{aligned} \qquad (3.\ 31.)$$

Die Entwicklung (3. 31.) ist konvergent, falls

$$\left| r_j \right| < 1, \quad j = 1, ..., n,$$

d.h.

$$\begin{cases} \dfrac{w_j - z_j}{z_j} < 1 \\ \dfrac{z_j - w_j}{z_j} < 1 \end{cases}, j = 1, ..., n, \qquad (3.\ 32.)$$

gilt.

Hieraus resultiert für w_j, $j = 1, ..., n$, die Einschließung

$$0 < w_j < 2 z_j, \ j = 1, ..., n. \qquad (3.\ 33.)$$

Aus (3. 33.) folgt, dass die Nichtkenntnis von z_j, $j = 1, ..., n$, keine ernsthafte Einschränkung des Verfahrens darstellt. Diese sollte jedoch eher zu groß als zu klein gewählt werden. Substituiert man (3. 31.) in (P. 2. 4.) und vernachlässigt die Glieder des mehr als zweiten Grades, so erhält man:

$$w_j = \frac{1}{x_j^0}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^0 z_j^{q_j}\left(1+q_{ij}r_j+\binom{q_{ij}}{2}r_j^2+y_i\right)\right),\ i=1,\dots,n. \tag{3. 34.}$$

bzw.

$$z_j\left(r_i+1\right)x_i^0-\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^0 z_j^{q_{ij}} q_{ij} r_j-\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^0 z_j^{q_{ij}}\binom{q_{ij}}{2}r_j^2 = y_i-\left(z_i x_i^0-\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^0 z_j^{q_{ij}}\right).\ \ i=1,\dots,n, \tag{3. 35.}$$

Mit

$$P:=\left(p_{ij}\right),\ i,j=1,\dots,n,$$

$$p_{ij:=}\begin{cases} z_j - q_{ij} z_j^{q_{ij}}\cdot\dfrac{b_{ij}^0}{x_j^0}, & \text{für } i=j \\ -q_{ij} z_j^{q_{ij}}\cdot\dfrac{b_{ij}^0}{x_j^0}, & \text{für } i\neq j \end{cases}$$

$$S:=\left(s_{ij}\right),\ i,j=1,\dots,n,$$

$$s_{ij}:=-\binom{q_{ij}}{2}z_j^{q_{ij}}\cdot\frac{b_{ij}^0}{x_j^0},$$

$$t:=\left(t_i\right),\quad i=1,\dots,n,$$

$$t_i:=y_i-\left(z_i x_i^0-\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^0 z_j^{q_{ij}}\right),$$

$$\hat{X}^0:=\begin{pmatrix} x_1^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_n^0 \end{pmatrix},$$

$$r:=\left(r_j\right),\ j=1,\dots,n,$$

$$r^*:=\left(r_j^2\right),\ j=1,\dots,n,$$

lässt sich (3. 35.) folgendermaßen darstellen:

$$P\hat{X}^0 r + s\hat{X}^0 r^* = t. \tag{3. 36.}$$

Sei nun

$$r^{(\nu)}:=r^{(\nu-1)}+\Delta r^{(\nu-1)},\quad \nu\in N. \tag{3. 37.}$$

Dann gilt wegen $r_j^* = r_j^2,\ j = 1,\dots,n,$

$$r_j^{*(\nu-1)} \approx r_j^{(\nu-1)} + 2r_j^{(\nu-1)}\Delta r_j^{(\nu-1)}, \quad j = 1,\dots,n;\ \nu \in N. \tag{3. 38.}$$

Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (3. 36.) wird nun folgendes Iterations-verfahren vorgeschlagen:

$$P\,\hat{X}^{0}\left(r^{(\nu-1)} + \Delta r^{(\nu-1)}\right) + s\,\hat{X}^{0}\left(\tilde{r}^{(\nu-1)} + \Delta\tilde{r}^{(\nu-1)}\right) = t, \tag{SNV}$$

mit

$$r^{(0)} := \left(P\,\hat{X}^{0}\right)^{-1} \cdot t, \tag{3. 39.}$$

$$r^{(\nu-1)} := \left(r^{(\nu-1)}\right)^2, \quad j = 1,\dots,n;\ \nu \in N,$$

(3. 40.)

$$\Delta r^{(\nu-1)} := \left(2r_j^{(\nu-1)}\Delta r_j^{(\nu-1)}\right),\ j = 1,\dots,n;\ \nu \in N.$$

B. 3. 21.

Es lässt sich leicht zeigen, dass das Verfahren (SNV) mit dem Newtonschen Verfahren [vgl. S. 3. 17.]

$$J\left(r^{(\nu-1)}\right)\left(r^{(\nu)} - r^{(\nu-1)}\right) = -f\left(r^{(\nu-1)}\right), \quad \nu \in N,$$

zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems $f(r) = 0$ identisch ist, wobei

$$r^{(\nu)} - r^{(\nu-1)} = \Delta r^{(\nu-1)}, \quad \nu \in N,$$

die Matrix

$$P\,\hat{X}^{0} + 2S\,\hat{X}^{0}\,R^{(\nu-1)}, \quad \nu \in N,$$

mit

$$\hat{R}^{0} := \begin{pmatrix} r_1^{(\nu-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2^{(\nu-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_n^{(\nu-1)} \end{pmatrix}, \quad \nu \in N,$$

die Jacobische Matrix $J\left(r^{(\nu-1)}\right),\ \nu \in N,$ und

$$t - P\,\hat{X}^{0}\,r^{(\nu-1)} - S\,\hat{X}^{0}\,r^{(\nu-1)} = -f\left(r^{(\nu-1)}\right), \quad \nu \in N,$$

sind. Daher lassen sich die Eigenschaften des Newtonschen Verfahrens, einschließlich dessen Konvergenz, auf das Verfahren (SNV) übertragen.

B. 3. 32.

Es sei bemerkt, dass bereits im Kapitel II das Newtonsche Verfahren zur Lösung des Problems (P. 2. 1'.) mit den Bedingungen (B. 3.), (B. 7.), (B. 22.) – (B. 24) dargelegt und begründet wurde [vgl. S. 2. 23.].

IV

Minimaleigenschaft des Input-Output-Modells

B. 4. 1.

In den Kapiteln II – III [vgl. S. 2. 3., B. 2. 7., S. 3. 12., B. 3. 14] wurde gezeigt, dass sie Verfahren VSA I – VSA II im gewissen Sinne die „beste Lösung“ des Problems (P. 2. 1’) liefern, da die Endnachfrage y mit der geringsten Gesamtproduktion x realisiert wird.

In diesem Kapitel wird diese so genannte „Minimaleigenschaft“ als selbstständige Theorie behandelt. Es wird dabei im Wesentlichen das Herangehen von P. Bod [vgl. Bod, Pétér: Nemlineáris ágazatközi kapcsolatok matematikai vizsgálata In: Szigma, 1975 (8), Nr. 4. S. 251 – 261] gewählt.

Hierzu werden einige Ergebnisse der indifferenten Optimierung verwendet.

Ausgangspunkt unserer Betrachtung ist das Problem (P. 2. 1’.), wobei die Aufwandsfunktion $b: \ R_+^n \to R_+^n$ die Bedingungen (B. 2.), (B. 7.), (B. 8.), (B. 15.) und (B. 16.) erfüllt.

Außerdem werden einige weitere Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen angeführt, die mit der „Minimaleigenschaft“ zusammenhängen.

D. 4. 1.

[Vgl. Rheinboldt, Werner C. : On M-Functions and their Application to Nonlinear Gauß-Seidel Iterations and to Network Flows.

Bericht der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Bonn, Nr. 23, Birlinghaven 1969.

Auch in: Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1970, S. 247 – 307]

Eine Abbildung $F: \ D \subset R^n \to R^m$ heißt *isoton* (bzw. *antiton*) auf D, wenn

$$\left\langle \forall x^1, x^2 \in D : x^1 \le x^2 \right\rangle \quad \Rightarrow \quad F(x^1) \le F(x^2) \quad (\text{bzw. } F(x^1) \ge F(x^2)).$$

Die Abbildung F heißt *streng isoton* (bzw. *streng antiton*) auf D, wenn

$$\left\langle \forall x^1, x^2 \in D : x^1 < x^2 \right\rangle \quad \Rightarrow \quad F(x^1) < F(x^2) \quad (\text{bzw. } F(x^1) > F(x^2)).$$

D. 4. 2.

[[Vgl. Rheinboldt, Werner C. : Ebenda]

Eine Abbildung $F: \ D \subset R^n \to R^m$ heißt *invers isoton* auf D, wenn

$$\left\langle F(x^1) \le F(x^2), \forall x^1, x^2 \in D \right\rangle \quad \Rightarrow \quad x^1 \le x^2. \qquad (4. 1.)$$

Die Abbildung F heißt *streng invers* auf D, wenn

$$\left\langle F(x^1) < F(x^2), \forall x^1, x^2 \in D \right\rangle \quad \Rightarrow \quad x^1 < x^2.$$

B. 4. 2.

Der Begriff „invers isotone Abbildung" wurde erstmals in 1952 durch Collatz eingeführt [Vgl. Collatz, L.: Aufgaben monotoner Art. In: Arch. Math. 3, 1953, 366-376]. Er wird durch folgende Aussage gerechtfertigt:

L. 4. 1.

$$\left\langle F : D \subset R^n \to R^m \text{ ist invers isoton.} \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left\langle F \text{ ist injektiv } \wedge\ F^{-1} : F(D) \subset R^n \to R^m \text{ ist isoton.} \right\rangle$$

Beweis:

$(\Rightarrow)$:

Sei F invers isoton. Dann gilt:

$$\left\langle F(x^1) = F(x^2),\ \forall x^1, x^2 \in D \right\rangle \ \Rightarrow \ (x^1 \le x^2 \wedge x^1 \ge x^2), \qquad (\because \text{ (4. 1.)})$$

also $x^1 = x^2$ und damit ist F injektiv.

Sei nun

$$u^1, u^2 \in F(D), \quad x^1 := F^{-1}(u^1), \quad x^2 := F^{-1}(u^2).$$

Dann gilt

$$\left\langle F(x^1) = u^1 \le u^2 = F(x^2) \right\rangle \ \Rightarrow \ \left\langle F^{-1}(u^1) = x^1 \le x^2 = F^{-1}(u^2) \right\rangle.$$

$(\Leftarrow)$:

Sei F injektiv und F^{-1} isoton. Dann gilt:

$$\left\langle u^1 = F(x^1) \le F(x^2) = u^2 \right\rangle \ \Rightarrow \ \left\langle x^1 = F^{-1}(u^1) \le F^{-1}(u^2) = x^2 \right\rangle.$$

q. e. d.

D. 4. 3. (*Ortega*)

[Vgl. Ortega, J.: Notes on Mnotone Convergence, 1969, unveröffentlichte persönliche Notizen, zitiert in Rheinhold, Werner C.: On M-Functions.]

Eine Abbildung $F : D \subset R^n \to R^n$ heißt *außerhalb der Diagonalen antiton*, wenn für alle $x \in R^n$ die Funktionen

$$\varphi_{ij}: \{t \in R^1 \mid x + te^j \in D\} \to R^1, \tag{4. 2.}$$

$$\phi_{ij}(t) = f_i(x + te^j), \quad i \neq j, \; i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

antiton sind.

Die Abbildung F heiß *diagonal isoton* (bzw. *diagonal streng isoton*), wenn für all $x \in R^n$ die Funktionen

$$\varphi_{ij}: \{t \in R^1 \mid x + te^j \in D\} \to R^1, \tag{4. 3.}$$

$$\phi_{ij}(t) = f_i(x + te^j), \quad i \neq j, \; i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

isoton (bzw. streng isoton) sind.

Eine diagonal isotone Abbildung F ist *surjektiv diagonal isoton*, wenn $D = R^n$ ist und für alle $x \in R^n$ alle in (4. 3.) auftretenden Funktionen φ_{ii} surjektiv sind.

D. 4. 4. (***Tamir***)

[Vgl. Tamir, A.: Minimality and Complementary Properties Associated with $Z-\text{Functions and } M-\text{Functions}$. In: Mathematical Programming, 1974, S. 7-31].

Eine außerhalb der Diagonalen antitone Abbildung $F: D \subset R^n \to R^n$ heißt eine $Z-$ *funktion.*

D. 4. 5. (***Rheinholdt***)

Eine $z-$Funktion $F: D \subset R^n \to R^n$ ist *gleichzeitig eine* M *– Funktion*, wenn sie auch invers isoton ist.

B. 4. 3.

Die M – Funktionen sind Verallgemeinerungen von M – Matrizen [Vgl. D. 1. 2.]. Dies wird im nächsten Satz gezeigt:

S. 4. 1.

Eine Matrix F ist genau dann eine M – Matrix, wenn die zugehörige lineare Abbildung $F: R^n \to R^n$ eine M – Funktion ist.

Beweis:

Die Behauptung folgt trivialerweise aus D. 4. 2. und D. 4. 5.

B. 4. 4.

In der Arbeit [Reinholdt, Werner C.: On M – Functions..., Ebenda] werden weitere Eigenschaften von M – Funktionen hergeleitet. Unter anderem wird folgende Aussage bewiesen, die die

Verallgemeinerung des bekannten Resultats darstellt, dass die Inverse einer $M-$Matrix streng positive Hauptdiagonalelemente besitzt.

S. 4. 2.

Sei $F: D \subset R^n \to R^n$ eine $M-$Funktion (und damit injektiv). Dann sind F und $F^{-1}: F(D) \subset R^n \to R^n$ diagonal streng isoton. Ist $F: R^n \to R^n$ eine surjektive $M-$Funktion, dann sind F und $F^{-1}: F(D) \subset R^n \to R^n$ surjektiv diagonal isoton.

S. 4. 3.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.) in der Form

$$y_i = f_i(x), \; i = 1, 2, ..., n, \tag{4. 4.}$$

mit

$$f_i(x) = x_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x_j). \tag{4. 5.}$$

Die Funktionen $f_i(x), \; i = 1, 2, ..., n,$ sind $Z-$Funktionen.

Beweis:

Es gilt:

$$f_i(x + te^k) = x_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} b_{ij}(x_j) - b_{ik}(x_k + t)$$

$$\leq x_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} b_{ij}(x_j) - b_{ik}(x_k)$$

$$= b_i(x).$$

q. e. d.

B. 4. 5.

Die $Z-$Funktionen besitzen interessante Eigenschaften, auf die Tamir [Vgl. Tamir, A.: Minimality and Complementarity…] hingewiesen hat. Er hat eine zu $Z-$Funktionen gehörende sog. „Komplementäraufgabe" untersucht und einen Algorithmus zu deren Lösung angegeben. Tamir hat gezeigt, dass für den Fall, dass eine Aufgabe zulässige Lösungen hat, auch eine sog. „Minimallösung" existiert, welche gleichzeitig auch den Komplementaritätsbedingungen genügt.

Die Ergebnisse von Tamir verallgemeinern frühere von Cottle und Veinott erzielte Resultate, die sich auf die sog. „lineare Komplementäraufgabe" beziehen.

{Vgl. Cottle, R. W.; Veinott, A. F. Jr.: Polyhedral Sets Having a Least Element. In: Mathematical Programming 1971, S. 238-249]

Im Folgenden wird gezeigt, dass die erwähnten Eigenschaften der $Z-\text{Funktionen}$ aus einem im Jahre 1964 von Wintgen und von der internationalen Fachliteratur nicht genügend beachteten Satz folgen.

[Vgl. Wintgen, G.: Indifferente Optimierungsprobleme. In: Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie, Internationale Tagung – Berlin, Oktober 1964, Konferenzprotokolle, Teil II, Akademie-Verlag, Berlin, 1965. S. 3-6. und Wintgen, G.: Indifferente Optimierungsprobleme, In: Operations Research Verfahren VI, Herausgegeben von Rudolf Henn, Hans Paul Künzi, Horst Schubert, I. Oberwolfach-Tagung über Operations Research, 18-24 August 1968, Verlag Anton Hain, Meisenheim, S. 233-236]

Der Satz von Wintgen bezieht sich auf den von ihm eingeführten Begriff der „Indifferenz".

D. 4. 6.

Mit (OP. 4. 1.) möge folgendes Optimierungsproblem bezeichnet sein:

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist ein } x^{\circ} \in R^n \text{ mit:} \\ \quad z(\overset{\circ}{x}) := \underset{(\min)}{\max}\{z(x) \mid x \in M\} \\ \quad z(x) \in S := \{z(x) \mid R^n \to R\}. \end{cases} \qquad \text{(OP. 4. 1.)}$$

D. 4. 7.

Das Problem (OP. 4. 1.) ist in Bezug auf die Klasse der Zielfunktionen S *indifferent*, wenn

$$\exists\, x^0 \in L:\ Z(x^0) \underset{\leq}{\geq} Z(x),\ \forall x \in M \wedge \forall z(x) \in S.$$

D. 4. 8.

Mit (OP. 4. 2.) möge folgendes Optimierungsproblem bezeichnet sein:

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist ein } \tilde{x} \in R^n \text{ mit:} \\ \quad z(\tilde{x}) := \underset{(\min)}{\max}\{z(x) \mid x \in M\} \\ \quad z(x) \in S' := \{z(x) \mid z(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i z_i(x),\ c_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., k\}. \end{cases} \qquad \text{(OP. 4. 2.)}$$

D. 4. 9.

Seien $x := (x_i) \in R^n,\ y := (y_i) \in R^n$. Wir definieren:

$$x \cup y := (\max(x_i; y_i))$$

$$x \cap y := (\min(x_i; y_i)).$$

B. 4. 6.

Die in D. 4. 9. eingeführten Operationen $\cup$ und $\cap$ sind kommutativ und assoziativ und es gelten, wovon man sich leicht überzeugen kann, die Verschmelzungsgesetze:

$$x \cap (x \cup y) = x \tag{4. 6.}$$

$$x \cup (x \cap y) = x \tag{4. 7.}$$

Damit bildet jede Menge von Vektoren, die zu zwei Vektoren x und y die „Vereinigung“ $x \cup y$ und den „Durchschnitt“ $x \cap y$ enthält, einen Verband, in dem durch

$$x \cup y = x \quad \Leftrightarrow \quad x \geq y \tag{4. 8.}$$

eine Halbordnung definiert ist, die mit der üblichen Halbordnung von Vektoren übereinstimmt.

[Vgl. z.B. Hermes, H. : Einführung in die Verbandstheorie, Berlin 1955]

In [Worobjow, N. N. : Extremale Matrizenalgebra (russisch), Doklady Akademii Nauk SSSR (1963) 1, S. 24 – 27] werden die Operationen $\cup$ und $\cap$ unter Benutzung der Symbole $\bar{m}$ und $\underline{m}$ eingeführt.

D. 4. 10

Gegeben sei eine Menge M und ein Verband V sowie eine Funktion

$$v : M \to V .$$

M heißt *in Bezug auf* V *nach oben abgeschlossen*, wenn es zu je zwei Elementen $r, s \in M$ in der Menge M ein Element t gibt, so dass

$$v(r) \cup v(s) = v(t)$$

gilt. M heißt *in Bezug auf* V *nach unten abgeschlossen*, wenn es zu je zwei Elementen $r, s \in M$ in der Menge M ein Element t gibt, so dass

$$v(r) \cap v(s) = v(t)$$

gilt.

S. 4. 4. (***Wintgen***)

Gegebene sei das Optimierungsproblem (OP. 4. 2.). Die Zielfunktionen $z_i(x),\ i = 1, 2, ..., k,$ mögen auf M ein endliches Maximum (Minimum) annehmen.

Das Optimierungsproblem (OP. 4. 2.) ist in Bezug auf die Klasse der Zielfunktionen S' indifferent, wenn die Menge M in Bezug auf die Funktion

$$z(x) := (z_i(x)) \in R^k$$

nach oben (unten) abgeschlossen, d.h.

$$\forall x, y \in M \;\; \Rightarrow \;\; z(x) \cup z(y) \in Z(M)$$

$$(\forall x, y \in M \ \Rightarrow \ z(x) \cap z(y) \in Z(M))$$

Dabei ist $Z(M)$ das Bild von M in R^k.

Beweis: (*für das Minimierungsproblem*)

Wegen der Annahme des Satzes existiert ein $\tilde{x}_i$ mit

$$z_i(\tilde{z}{}^i) = \max(z_i(x)), \quad \forall x \in M, \ i = 1, 2, ..., k.$$

Sei nun

$$\bigcup_{i=1}^{k} Z(\tilde{x}{}^i) := (z_1(\tilde{x}{}^i), ..., z_k(\tilde{x}{}^i))^T \in Z(M).$$

Wegen der Abgeschlossenheit nach oben von M existiert ein $\overset{0}{x} \in M$ mit

$$Z(\overset{0}{x}) = (\max z_1(x), ..., \max z_k(x))^T, \quad \forall x \in M.$$

Daraus ergibt sich

$$Z(\overset{0}{x}) \geq Z(x), \quad \forall x \in M.$$

Es sei $z(x) \in S'$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z(\overset{0}{x}) &= \sum_{i=1}^{k} c_i z_i(\overset{0}{x}) \\ &\geq \sum_{i=1}^{k} c_i z_i(\overset{0}{x}) \\ &= z(x), \quad \forall x \in M. \end{aligned}$$

q. e. d.

B. 4. 7.

Es ist bemerkenswert, dass Wintgen [Wintgen, G.: Die Berechnung der vollen Aufwendungen bei Lagerbeständen. In: Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, Gesellschafts- und Sprachwissenschaftliche Reihe XIII (1964) 5, S. 659 – 664] zunächst anhand des Spezialfalls eines statischen Verflechtungsmodells auf das Problem der indifferenten Optimierung hinwies. Er hat gezeigt, dass die Lösung x des Problems

$$x = Ax + y - s \qquad \text{(P. 4. 1.)}$$

$s \in R_+^n$: Vektor des Lagerbestands

eine Lösung des linearen Optimierungsproblems

$$\min\left\{c^T x \mid (E - A)x \geq y - s, \ x \geq 0\right\} \qquad \text{(OP. 4. 3.)}$$

ist, wobei $c \in R_+^n$ beliebig gewählt werden kann. Wintgen ging zwar in [Wintgen, G.: Die Berechnung der vollen Aufwendungen bei Lagerbeständen. In: Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, Gesellschafts- und Sprachwissenschaftliche Reihe XIII (1964) 5, S. 659 – 664] von der Annahme aus, dass $A \geq 0$ und $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1$ für mindestens ein $i = 1, 2, \ldots n$ gilt, hat aber bereits in [Wintgen, G.: Indifferente Optimierungsprobleme. In: Mathematik und Kybernetik…] darauf hingewiesen, dass die genannte Eigenschaft auch unter der schwächeren Voraussetzung $A \geq 0$ und a_{ii} vorliegt. Dies ist eine Folge des nachstehenden allgemeinen Satzes:

S. 4. 5.

Enthält im linearen Optimierungsproblem

$$\min\{c^T x \mid Bx \geq b,\ x \geq 0\} \tag{OP. 4. 4.}$$

mit $B^{(m,n)},\ b \in R^m$ die Matrix B in jeder Zeile ein nichtnegatives Element, während alle übrigen Elemente der Zeile nichtpositiv sind, so ist dieses Optimierungsproblem indifferent in Bezug auf die Menge aller linearen Zielfunktionen mit nichtnegativen Koeffizienten, falls es überhaupt lösbar ist.

Beweis:

Die n Zielfunktionen $z(x) = x_i$ nehmen wegen $x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots n$, ein Minimum aus

$$M : \{x \mid Bx \geq b,\ x \geq 0\}$$

an. Es ist also nur zu zeigen, dass für zwei zulässige Programme $x, y \in M$

$$u := x \cap y \in M$$

gilt:

Das Ungleichungssystem $Bx \geq b,\ x \geq 0$ besteht aus endlich vielen Ungleichungen, die alle auf die Form

$$b_i x_i \geq \sum_{i \neq j} b_j x_j + b_i, \qquad b_i,\ b_j \geq 0,$$

gebracht werden können.

Gilt gleichzeitig

$$b_i y_i \geq \sum_{i \neq j} b_j y_j + b_i,$$

so bleiben die Ungleichungen bestehen, wenn man zuerst auf den rechten Seiten die x_j bzw. y_j durch $u_j := \min(x_j, y_j)$ ersetzt. Sodann kann man auch auf den linken Seiten x_i bzw. y_i durch u_i ersetzen und von zwei entstehenden identischen Ungleichungen nur eine aufführen. So erhält man gerade das Ungleichungssystem

$$Bu \geq b, \quad u \geq 0.$$

q. e. d.

S. 4. 5. (*Bód*)

Das lineare Optimierungsproblem

$$\min\left\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\right\} \qquad \text{(OP. 4. 5.)}$$

ist indifferent in Bezug auf alle linearen Zielfunktionen mit nichtnegativen Koeffizienten dann und-falls Entartung ausgeschlossen werden kann- nur dann, wenn die Matrix A eine zulässige Basis B^0 besitzt, in der sämtliche Spalten von A, die nicht zu B gehören, nicht positive Koordinaten enthalten.

Beweis:

[Vgl. Bód, P.: Bemerkungen zu einem Satz von G. Wintgen (ungarisch), MTA III, Osztály Közleményei 16 (1966)].

D. 4. 11. (*Maximalelement* bzw. *Minimalelement*)

$\tilde{x}$ heißt ein *Maximalelement* (bzw. ein *Minimalelement*) der Menge $H \subset R^n$, wenn

$$\tilde{x} \in H \;\wedge\; \tilde{x} \geq x, \quad \forall x \in H$$

(bzw. $\tilde{x} \in H \;\wedge\; \tilde{x} \leq x, \quad \forall x \in H$)

gilt.

B. 4. 8.

Ist das Problem (OP. 4. 2.) indifferent, so ist $Z(\hat{x})$ ein Maximalelement (ein Minimalelement) von $Z(M)$.

D. 4. 12. (*Komplementarität*)

Gegeben seien die Abbildungen

$$f : R_+^n \to R_+^n$$

und $b \in R^n$. Mit (P. 4. 2.) möge folgendes *Komplementaritätsproblem* bezeichnet sein:

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist ein Vektor } x, \text{ der folgenden Bedingungen genügt:} \\ i)\; f(x) + b \geq 0, \quad x \geq 0 \\ ii)\; x^T (f(x) + b) = 0 \end{cases} \qquad \text{(P. 4. 2.)}$$

Ein Vektor x heißt zulässig, wenn er *i)* erfüllt. Eine zulässige Lösung ist *komplementär,* falls sie auch der Bedingung *ii)* genügt.

L. 4. 2.

Sei

$$M := \{x \mid f(x) + b \geq 0,\ x \geq 0\} \neq \emptyset,$$

$$|M| > 1, \qquad f : R_+^n \to R, \qquad b \in R^n.$$

Ist f eine $Z-\text{Funktion}$, dann ist die Menge M in Bezug auf die Operation $\cap$ abgeschlossen, d.h.

$$x, y \in M \ \Rightarrow\ x \cap y \in M.$$

Beweis:

$$x, y \in M \ \Rightarrow\ f(x_i) + b_i \geq 0 \ \wedge\ f_i(y) + b_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Sei nun $z_i := x \cap y$ .Wegen $x \geq 0$ hat man:

$$y \geq 0 \ \Rightarrow z \geq 0.$$

Wir setzen $z_i := x_i$ und definieren eine Punktfolge

$$z := v^{(0)},\ v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)} =: x$$

mit

$$v^{(k)} := v^{(k-1)} + t_k e^{(k)}$$

und

$$t_k := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad z_k = x_k \\ x_k - y_k & \text{für} \quad x_k = y_k \end{cases}$$

Es gilt wegen D. 4. 3. – D. 4. 4. für alle $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$f_i(v^{(k)}) = f_i(v^{(k-1)} + t_k e^{(k)})$$

$$\leq f_i(v^{(k-1)}),$$

$$f_i(x) \leq f_i(z),$$

$$f_i(x) + b_i \geq 0 \ \Rightarrow\ f_i(z) + b_i \geq 0,$$

$$f(z) + b \geq 0,$$

d.h. $z \in M$. *q. e. d.*

L. 4. 3.

Gegeben sei die in L. 4. 2. definierte Menge $M \neq \emptyset$. Ist f eine steige Z -Funktion, dann besitzt M ein Minimalelement.

Beweis:

Betrachtet sei folgende Familie von nichtlinearen Optimierungsproblemen:

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist ein } \bar{x} \in R^n \text{ mit} \\ z(\bar{x}) = \min z(x) \\ x \in M := \{x \mid f(x) + b \geq 0,\ x \geq 0\} \\ z(x) \in S'' := \left\{ z(x) \mid z(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z_i(x),\ c_i \geq 0,\ i = 1,2,\dots,n\} \right\} \\ z_i(x) := x_i \end{cases} \qquad \text{(OP. 4. 6.)}$$

Die Funktionen $z_i(x),\ i = 1,2,\dots n,$ stellen also eine identische Abbildung dar:

$$Z(x) = Ex.$$

Wegen L. 4. 2. gilt nun

$$x, y \in M \Rightarrow Z(x) \cap Z(y) = x \cap y \in y \in Z(M) = M.$$

Aus der Stetigkeit von f folgt, dass M abgeschlossen ist. Im Falle, dass M auch beschränkt ist, nimmt jede der Funktionen $z_i(x)$ ihr endliches Minimum in M an. Somit sind die Voraussetzungen des Satzes S. 4. 4. erfüllt. Es gibt also ein $\hat{x} \in M$, in dem alle nichtnegativen linearen Funktionen ihr Minimum annehmen, d.h. $\hat{x}$ ist ein Minimalelement von M. Dies folgt nun zum einen aus den im Zusammenhang mit S. 4. 4. gemachten Bemerkungen, wonach $Z(\hat{x})$ ein Minimalelement der Menge $Z(M)$ ist und da jetzt $Z(M) = M$ ist, ist auch $Z(\hat{x}) = \hat{x}$.

Andererseits folgt aus der Tatsache

$$x \leq y \Leftrightarrow x^T x \leq c^T y \text{ für } \forall c \in R_+^n,$$

dass jeder Punkt einer Menge, in dem jede beliebige nichtnegative lineare Funktion ein Minimum annimmt, ein Minimalelement dieser Menge ist und umgekehrt.

Falls M nun nicht beschränkt ist, betrachten wir ein beliebiges $\tilde{x} \in M$.

Wegen $M \neq \varnothing$ ist die Existenz von $\tilde{x}$ gesichert, und wir können die oben angeführten Gedankengänge auf die Menge

$$M' := \left\{ x \mid x \in M,\ x \leq \tilde{x} \right\} \subset M$$

anwenden.

Offensichtlich ist $M' \neq \varnothing$ und in Bezug auf die Operation $\cap$ abgeschlossen und beschränkt. Ein Minimalelement von M' ist gleichzeitig ein Minimalelement von M. *q. e. d.*

L. 4. 4.

Ist $\hat{x}$ ein Minimalelement der Menge M und f eine stetige Z – Funktion, dann ist $\hat{x}$ eine Komplementärlösung.

Beweis:

Nehmen wir an, dass $\hat{x}$ die Komplementaritätsbedingung nicht erfüllt. Dann

$$\exists i: \ \hat{x}(f_i(\hat{x})+b_i)>0$$

oder

$$\hat{x}>0 \ \wedge \ f_i(\hat{x})+b_i>0.$$

Für ein beliebig kleines $\delta>0$ ist

$$\tilde{x}:=\hat{x}-\delta e^i\geq 0.$$

Es gilt nun:

$$F_{ji}(t)=f_j((\hat{x}-\delta e^i)+te^i) \quad \leq f_j(\hat{x}-\delta e^i).$$

Für $t:=\delta$ hat man:

$$F_{ji}(\delta)=f_j(\hat{x})$$

$$\leq f_j(\hat{x}-\delta e^i) \quad = f_j(\tilde{x}),$$

$$f_j(\hat{x})+b_j\geq 0 \quad \Rightarrow \quad f_j(\tilde{x})+b_j\geq 0, \quad j=1,2,...,n; \ j\neq i.$$

Falls notwendig kann δ noch verallgemeinert werden, und es gilt

$$f_i(\tilde{x})+b_i = f_i(\hat{x}-\delta e^i)\geq 0.$$

Damit haben wir gleichzeitig $\tilde{x}\in M$ und $\tilde{x}_i<\hat{x}_i$, was der Annahme widerspricht, dass $\hat{x}$ ein Minimalelement der Menge M ist. *q. e. d.*

S. 4. 5.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.)in der Form (4. 4.), wobei die Aufwandsfunktion $b:R_+^n\to R_+^n$ die Bedingungen (B. 3.), (B. 7.), (B. 15.) und (B. 16.) erfüllt. Ferner möge folgende Voraussetzung gelten:

$$\exists \text{ ein } x^+\in R_+^n: \ f(x^+)>0.$$

Der zugehörige Endnachfragevektor sei mit $\hat{y} > 0$ bezeichnet.

Sei

$$M_{\hat{y}} := \left\{ x \mid f(x) - \hat{y} \geq 0 \right\} \neq \emptyset.$$

Dann gilt:

A. $\forall \hat{y} \in R^n_+ \setminus \{0\} \; \exists \hat{x} \in R^n_+ : \; f(\hat{x}) = \hat{y}$

B. Die Lösung $\hat{x}$ ist ein Minimalelement von $M_{\hat{y}}$.

Beweis (von A und B zusammen):

Da $f(x)$ gemäß S. 4. 3. eine $Z-$Funktion ist, hat $M_{\hat{y}}$ laut L. 4. 3. ein Minimalelement; sei dies mit $\hat{x}$ bezeichnet. Wir müssen noch zeigen, dass $\hat{x}$ eine Lösung des Problems (P. 2. 1'.) ist:

Laut L. 4. 4. ist $\hat{x}$ eine Komplementärlösung, d. h. $\hat{x}^T (f(\hat{x}) - \hat{y}) = 0.$ Wir zeigen, dass $\hat{x}^T > 0$ ist:

Nehmen wir umgekehrt an, dass $\hat{x}^T = 0$ für mindestens ein i gilt. Dann würde die die Menge $M_{\hat{y}}$ bestimmende Bedingung lauten

$$\hat{x}_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\hat{x}_j) - x_i < 0.$$

Somit wäre $\hat{x}$ nicht zulässig. Daher gilt $\hat{x}^T > 0$ und folglich

$$f(\hat{x}) - \hat{y} = 0.$$ *q. e. d.*

B. 4. 9.

Die „Minimaleigenschaft" des Problems (P. 2. 1'.) unter den Bedingungen (B. 3.), (B. 7.), (B. 15.) und (B. 16.) garantiert, dass die geforderte Endnachfrage y mit der (Komponentenweise) geringsten Gesamtproduktion x realisiert wird. Eine solche Produktion ist auch kostenminimal, falls eine monoton wachsende Kostenfunktion als Güterkriterium gewählt wird. Hierzu können die Primärressourcenfunktionen dienen [Vgl. Kapitel VI] Es ist aber auch denkbar, von einer „Funktion der gesellschaftlichen Produktionskosten" auszugehen. Zum Beispiel schlägt Bód [Vgl. Bód, Pater: Nemlineáres…] folgende Funktion vor:

$$\varphi: \; R^n_+ \to R^n_+$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$E1: \quad \varphi(0) = 0$$

$$E2: \quad \varphi(x) > 0 \quad \text{für } \|x\| > 0$$

$$E3: \quad \forall x^1, x^2 \in R_+^n : \; x^1 \leq x^2 \;\; \Rightarrow \varphi(x^1) \leq \varphi(x^2).$$

S. 4. 6.

Ist $\hat{x}$ das Minimalelement von $M_{\hat{y}}$ und sind in $\hat{x}$ sämtliche Regularitätsvoraussetzungen erfüllt, dann gilt

$$\frac{df}{dx}(\hat{x}) \in M_M .$$

Beweis:

Da $\hat{x}$ das Minimalelement von $M_{\hat{y}}$ ist, stellt es eine Minimallösung folgender nichtlinearer Optimierungsprobleme dar:

$$Min\left\{x_i \mid \hat{y} - f(x) \leq 0, \; x \in R_+^n\right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad \text{(OP. 4. 7.)}$$

In S. 4. 5. wurde gezeigt, dass $\hat{x} > 0$ ist. Da sämtliche Regularitätsvoraussetzungen erfüllt sind, gelten die notwendigen Kuhn-Tucker-Optimalitätsbedingungen. Unter anderem gilt die Bedingung, dass der Gradient der Zielfunktion in $\hat{x}$ eine nichtpositive Linearkombination der Gradienten der aktiven Nebenbedingungen ist. In $\hat{x}$ sind aber sämtliche Nebenbedingungen des Problems (OP. 4. 7.) aktiv. Daher gilt:

$$e^i = -grad\left(\hat{y} - f(\hat{x})\right) \cdot \hat{u}_i$$

$$= grad f(\hat{x}) \cdot \hat{u}_i , \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Mit

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \hat{u}_n \end{pmatrix} \geq 0$$

erhält man

$$E = \frac{df}{dx}(\hat{x}) \geq 0,$$

$$U = \left(\frac{df}{dx}(\hat{x}) \right)^{-1} \geq 0.$$ *q. e. d.*

S. 4. 7.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1'.), wobei die Aufwandsfunktion $b: R_+^n \to R_+^n$ die Bedingungen (B. 3.), (B. 7.), (B. 8.), (B. 15.), (B. 16.) und (B. 18.) erfüllt.

Dann ist das Problem (P. 2. 1.) eindeutig global lösbar.

Beweis:

Aus der Konkavitätsvoraussetzung (B. 18.) für b folgt die Konvexität von $f(x)$.

Nehmen wir im Gegensatz zur Behauptung an, dass $\hat{x}$ und $\tilde{x}$, $\hat{x} \neq \tilde{x}$ Lösungen des Problems (P. 2. 1'.) für ein festes $\hat{y}$ sind:

$$f(\hat{y}) = \hat{y} \quad \wedge \quad f(\tilde{x}) = \hat{y}, \tag{4. 10.}$$

wobei $\hat{x}$ die Minimallösung dieses Problems darstellt:

$$\hat{x} \leq \tilde{x}. \tag{4. 11.}$$

Es gilt wegen der Konvexität von $f(x)$:

$$\left(\frac{df}{dx}(\hat{x}) \right) \left(\tilde{x} - \hat{x} \right) \leq f(\tilde{x}) - f(\hat{x})$$

$$= 0, \qquad (\because (4.10.))$$

$$\tilde{x} \leq \hat{x}, \qquad (\because (S.4.6.))$$

$$\tilde{x} = \hat{x}.$$

B. 4. 10.

In S. 4. 7. lässt sich die Konvexitätsvoraussetzung für $f(x)$ dadurch schwächen, dass man stattdessen fordert: $f(x)$ ist in $\hat{x} \in R_+^n$ lokal quasikonvex.

V

Primärressourcen im nichtlinearen Input-Output-Modell

D. 5. 1.

Als *Primärressourcen* (*exogene Faktoren, Randinputs*) werden Wertbestandteile außer den Lieferungen innerhalb der produktiven Sphäre bezeichnet.

(Diese sind z.B. Arbeitskräfte, Importe, Gewinn, Steuer usw.)

Sei

$l_j,\ j=1,2,...,n:$ die benötigten Arbeitskräfte im Sektor j,

$r_j,\ j=1,2,...,n:$ die Abschreibung im Sektor j,

$m_j,\ j=1,2,...,n:$ die Importe des Sektors j,

$q_j,\ j=1,2,...,n:$ die Gewinne, Steuer usw. des Sektors j.

B. 5. 1.

Zur Vereinfachung der Darstellung und Meidung von Wiederholungen sei zunächst von einer einzigen Primärressourcen $\tilde{b}_j,\ j=1,2,...,n$, ausgegangen. Sei also

$$\tilde{b}_j = l_j + r_j + m_j + q_j, \quad j=1,2,...,n. \tag{5. 1.}$$

Später werden einige Besonderheiten der einzelnen Bestandteile von $\tilde{b}_j,\ j=1,2,...,n$, untersucht.

D. 5. 2.

Allgemein sei

$$\tilde{b}:\ R_+^m \to R_+^n \tag{5. 2.}$$

als *Primärressourcenfunktion* (*Funktion des exogenen Faktors, Randinputfunktion*) bezeichnet, wobei unter Berücksichtigung von (B. 5. 1.) zunächst $m=1$ vorausgesetzt wird.

B. 5. 2.

Im Allgemeinen ist $\tilde{b}_j,\ j=1,2,...,n$, von der Gesamtproduktion aller Sektoren der Volkswirtschaft abhängig, d. h.

$$\tilde{b}_j = \tilde{b}_j(x) \qquad (5.\ 3.)$$

$$\equiv \tilde{b}_j^{+}(x) \cdot x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Zwei wichtige <u>Spezialfälle</u> der Primärressourcenfunktion (5. 3.) sind:

$$\tilde{b}_j = \tilde{b}_j(x)$$

$$\equiv \tilde{b}_j^{+}(x_j) \cdot x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (5.\ 4.)$$

und

$$\tilde{b}_j = \tilde{b}_j^{+} \cdot x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (5.\ 5.)$$

<u>B. 4. 3.</u>

Aus (4. 3.) geht hervor, dass die vom Sektor $j = 1, 2, \ldots, n$ benötigte Menge an die Primärressource der Gesamtproduktion dieses Sektors proportional ist.

Die Größe

$$\tilde{b}_j^{+} := \frac{\tilde{b}_j}{x_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (5.\ 6.)$$

wird als *Koeffizient des direkten Ressourcenaufwands* bezeichnet.

Es gilt im Allgemeinen

$$\tilde{b}^{+} \cdot x \leq \tilde{b}$$

mit

$$\tilde{b}^{+} := (\tilde{b}_j^{+}), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (5.\ 7.)$$

und

$\tilde{b} \in R_{+}^{1}$: die benötigte Menge an die Primärressource für alle Sektoren der Volkswirtschaft.

<u>B. 5. 4.</u>

Analog den Koeffizienten des vollen Aufwands lassen sich auch für die Primärressourcen *Koeffizienten des vollen Ressourcenaufwands* $\tilde{\tilde{b}}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n,$ nach folgender Formel ermitteln:

$$\tilde{\tilde{b}}_j = \tilde{b}_j^{+} + \tilde{b}_j^{++}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (5.\ 8.)$$

mit

$\tilde{b}_j^{+},\ j=1,2,...,n:$ der Koeffizient des direkten Ressourcenaufwands für Sektor j,

$\tilde{b}_j^{++},\ j=1,2,...,n:$ der Koeffizient des indirekten Ressourcenaufwands für Sektor j.

B. 5. 5.

Entsprechend den Formeln (5. 3.) – (5. 5.) lassen sich $\tilde{b}_j^{++},\ j=1,2,...,n,$ folgendermaßen ermitteln:

$$\bar{b}_j = \tilde{b}_j^{+}(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \bar{b}_i \cdot a_{ij}(x^*) \tag{5. 9.}$$

$$= \tilde{b}_j^{+}(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \bar{b}_i \frac{b_{ij}(x^*)}{x_j^*}, \quad j=1,2,...,n;$$

$$\bar{b}_j = \tilde{b}_j^{+}(x_j^*) + \sum_{i=1}^{m} \bar{b}_i \cdot a_{ij}(x_j^*) \tag{5. 10.}$$

$$= \tilde{b}_j^{+}(x_j^*) + \sum_{i=1}^{m} \bar{b}_i \frac{b_{ij}(x_j^*)}{x_j^*}, \quad j=1,2,...,n;$$

$$\bar{b}_j = \tilde{b}_j^{+} + \sum_{i=1}^{m} \bar{b}_i \cdot a_{ij} \tag{5. 11.}$$

$$= \tilde{b}_j^{+} + \sum_{i=1}^{m} \bar{b}_i \frac{b_{ij}}{x_j^*}, \quad j=1,2,...,n.$$

Hier ist $x^* := (x_j^*) \in R_+^n$ eine Lösung des Gleichungssystems

$$x = A(x)x + y$$
$$= b(x) + y.$$

B. 5. 6.

Für die Spezialfälle

$$b(x) := (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} b_j(x),...,\alpha_{nj} b_j(x))^T$$

bzw.

$$b(x) := (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} b_j(x_j),...,\alpha_{nj} b_j(x_j))^T$$

lassen sich (5. 9.) bzw. (5. 10.) folgendermaßen umschreiben:

$$\bar{b}_j = \tilde{b}_j^{+}(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \cdot \frac{\alpha_{ij} b_j(x^*)}{x_j^*}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5. 12.}$$

$$\bar{b}_j = \tilde{b}_j^{+}(x_j^*) + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \cdot \frac{\alpha_{ij} b_j(x_j^*)}{x_j^*}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5. 13.}$$

B. 5. 7.

Im Falle linearer Aufwandsfunktionen gilt

$$b_j(x) = b_j(x_j) = c_j x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

d. h.

$$\frac{\alpha_{ij} b_j(x^*)}{x_j^*} = \frac{\alpha_{ij} b_j(x_j^*)}{x_j^*} = \alpha_{ij} c_j = a_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

B. 5. 8.

Das Gleichungssystem (5. 9.) lässt sich in der Matrizenschreibweise wie folgt darstellen:

$$\bar{b} = \tilde{b}^{+}(x^*) + A^T(x^*)\bar{b}. \tag{5. 14.}$$

Hier sind:

$$\bar{b} := (\bar{b}_j) \in R_+^n,$$

$$\tilde{b}^{+}(x^*) := (\tilde{b}_j^{+}) \in R_+^n,$$

$$A(x^*) := (a_{ij}(x^*)), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

B. 5. 9

Aus (4. 14.) lässt sich $\bar{b}$ wie folgt direkt berechnen:

$$\bar{b} = (E - A^T(x^*))^{-1} \tilde{b}^{+}(x^*). \tag{5. 15.}$$

Es wird jedoch empfohlen, zur Lösung des linearen Gleichungssystems das Verfahren der sukzessiven Approximation [vgl. Kapitel III] anzuwenden:

$$\bar{b}^{(0)} = \tilde{b}^{+}(x^*) \tag{5. 16.}$$

$$\bar{b}^{(\nu)} = A^T(x^*)\bar{b}^{(\nu-1)} + \tilde{b}^{+}(x^*). \tag{5. 17.}$$

S. 5. 1.

Die durch (5. 16.) – (5. 17.) erzeugte Folge $\{\bar{b}^{(\nu)}\},\ \nu \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ ist monoton wachsend.

Beweis (Induktion):

Es gilt:

$$\bar{b}^{(1)} = A^T(x^*)\bar{b}^{(0)} + \bar{b}^{(0)} \qquad (\because (5.16. - 5.17.))$$

$$\geq \bar{b}^{(0)} \qquad (\because A^T(x^*) \geq 0,\ \bar{b}^{(0)} \geq 0)$$

$$\geq 0\,.$$

Es gelte die Induktionshypothese

$$\bar{b}^{(\nu)} \geq \bar{b}^{(\nu-1)}$$

$$\geq 0.$$

Es gilt dann:

$$\bar{b}^{(\nu+1)} - \bar{b}^{(\nu)} = A^T(x^*)\bar{b}^{(\nu)} - A^T(x^*)\bar{b}^{(\nu-1)}$$

$$= A^T(x^*)(\bar{b}^{(\nu)} - \bar{b}^{(\nu-1)})$$

$$\geq 0\,,$$

$$\bar{b}^{(\nu+1)} \geq \bar{b}^{(\nu)}$$

$$\geq 0\,.$$

q. e. d.

S. 5. 2.

Die Folge (5. 16.)-(5. 17.) konvergiert gegen die eindeutige Lösung des Gleichungssystems (5. 14.).

Beweis:

Die Behauptung folgt aus Satz S. 2. . unter Berücksichtigung der Tatsache, dass folgendes gilt:

$$\| A(x^*) \|_1 =: \max_j \sum_{i=1}^{n} | a_{ij}(x^*) | \qquad (5.\ 18.)$$

$$= \max_i \sum_{j=1}^{n} | a_{ji}(x^*) |$$

$$= \| A^T(x^*) \|_\infty$$

$$< 1\,.$$

q. e. d.

B. 5. 10.

S. 5. 2. lässt sich auch direkt beweisen:

(4. 18. garantiert die Existenz von $(E - A^T(x^*))^{-1}$ und damit die eindeutige Lösbarkeit von

(4. 14.).

Es gilt ferner

$$\bar{b}^{(1)} = A^T(x^*)\bar{b}^{(0)} + \bar{b}^{(0)},$$

$$\bar{b}^{(2)} = A^T(x^*)\bar{b}^{(1)} + \bar{b}^{(0)}, \qquad .$$

.

$$\bar{b}^{(\nu)} = A^T(x^*)\bar{b}^{(\nu-1)} + \bar{b}^{(0)},$$

also

$$\bar{b}^{(\nu)} = (E + A^T(x^*) + (A^T)^2(x^*) + \ldots + (A^T)^{\nu-1}(x^*))\bar{b}^{(0)} + (A^T)^{\nu}(x^*)\bar{b}^{(0)} \quad . \tag{5. 19.}$$

Man erhält ferner

$$\lim_{\nu\to\infty}(A^T)^{\nu}(x^*) = 0 \qquad \because\ (5.\ 18.))$$

und

$$\lim_{\nu\to\infty}(E + A^T(x^*) + (A^T)^2(x^*) + \ldots + (A^T)^{\nu-1}(x^*)) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(A^T)^{\nu}(x^*) = (E - A^T(x^*))^{-1}.$$

geht man in (5. 19.) zum Grenzwert über, so ergibt sich

$$\bar{b} = \lim_{\nu\to\infty}\bar{b}^{(\nu)} = (E - A^T(x^*))^{-1}\tilde{b}^{+}(x^*). \tag{5. 20.}$$

Damit ist die Konvergenz der Folge (5. 16.) – (5. 17.) bewiesen.

Aus (4. 20.) folgt nun:

$$(E - A^T(x^*))^{-1}\bar{b} = \tilde{b}^{+}(x^*)$$

$$\bar{b} = A^T(x^*)\bar{b} + \tilde{b}^{+}(x^*),$$

d. h. der Grenzwert $\bar{b}$ löst das System (4. 14.). Da $(E - A^T(x^*))$ regulär ist, ist diese Lösung eindeutig.

q. e. d.

B. 5. 11.

Die Folge (5. 17.) konvergiert auch für jede beliebige Anfangslösung $\bar{b}^{(0)}$ (also nicht nur für $\bar{b}^{(0)} := \tilde{b}^{+}(x^*)$) gegen die eindeutige Lösung von (5. 14.) [Vgl. dazu den Beweis von S. 5. 2.]

S. 5. 3.

Für die Folge (4. 16.) – (4. 17.) gilt die Fehlerabschätzung

$$\|\bar{b}-\bar{b}^{(\nu)}\| \leq \frac{|A^T(x^*)\|^{\nu+1}}{1-\|A^T(x^*)\|}\cdot\|\tilde{b}^{+}(x^*)\|, \qquad (5.\ 21.)$$

Beweis:

Seien $\bar{b}^{(\nu-1)}$ und $\bar{b}^{(\nu)}$, $\nu \geq 1$, zwei nacheinander folgende Näherungslösungen des Gleichungssystems (4. 14.). Es gilt für $\mu \geq 1$:

$$\|\bar{b}^{(\nu+\mu)}-\bar{b}^{(\nu)}\| \leq \|\bar{b}^{(\nu+\mu)}-\bar{b}^{(\nu)}\| + \|\bar{b}^{(\nu+2)}-\bar{b}^{(\nu+1)}\| + \ldots + \|\bar{b}^{(\nu+\mu)}-\bar{b}^{(\nu+\mu-1)}\|,$$

$$\bar{b}^{(\vartheta+1)}-\bar{b}^{(\vartheta)} \leq A^T(x^*)(\bar{b}^{(\vartheta)}-\bar{b}^{(\vartheta-1)},$$

$$\|\bar{b}^{(\vartheta+1)}-\bar{b}^{(\vartheta)}\| \leq \|A^T(x)\| + \|\bar{b}^{(\vartheta)}-\bar{b}^{(\vartheta-1)}\|$$

$$\leq \|A^T(x)\|^{\vartheta-\nu} + \|\bar{b}^{(\nu+1)}-\bar{b}^{(\nu)}|, \qquad \nu \in [1,\ \vartheta[.$$

$$\|\bar{b}^{(\nu+\mu)}-\bar{b}^{(\nu)}\| \leq \|\bar{b}^{(\nu+1)}-\bar{b}^{(\nu)}\| + \|A^T(x)\|\cdot\|\bar{b}^{(\nu+1)}-\bar{b}^{(\nu)}\| + \ldots + \|A^T(x)\|^{\mu-1}\cdot\|\bar{b}^{(\nu+1)}-\bar{b}^{(\nu)}\|$$

$$\leq \frac{1}{1-\|A^T(x^*)\|}\cdot\|\bar{b}^{(\nu+1)}-\bar{b}^{(\nu)}\|. \qquad (5.\ 23.)$$

Geht man zum Grenzwert über, so erhält man für $\mu \to \infty$

$$\|\bar{b}-\bar{b}^{(\nu)}\| \leq \frac{\cdot\|\bar{b}^{(\nu+1)}-\bar{b}^{(\nu)}\|}{1-\|A^T(x^*)\|}, \quad \nu \geq 1,$$

oder

$$\|\bar{b}-\bar{b}^{(\nu)}\| \leq \frac{\|A^T(x^*)\|}{1-\|A^T(x^*)\|}\cdot\|\bar{b}^{(\nu+1)}-\bar{b}^{(\nu)}\|. \qquad (5.\ 24.)$$

Es gilt ferner

$$\|\bar{b}-\bar{b}^{(\nu)}\| \le \frac{\|A^T(x^*)\|^{\nu}}{1-\|A^T(x^*)\|}\cdot\|\bar{b}^{(1)}-\bar{b}^{(0)}\|.$$

Für $\bar{b}^{(0)} := \tilde{b}^{+}(x^*)$ hat man:

$$\tilde{b}^{(1)} = A^T(x^*)\tilde{b}^{+}(x^*)+\tilde{b}^{+}(x^*),$$

$$\|\bar{b}^{(1)}-\tilde{b}^{(0)}\| = \|A^T(x^*)\tilde{b}^{+}(x^*)\|$$

$$\le \|A^T(x^*)\|\cdot\|\tilde{b}^{+}(x^*)\|$$

und

$$\|\bar{b}-b^{(\nu)}\| \le \frac{\|A^T(x^*)\|^{\nu+1}}{1-\|A^T(x^*)\|}\cdot\|\tilde{b}^{+}(x^*)\|.$$ *q. e. d.*

B. 5. 12.

Für $\|A^T(x^*)\| \le \frac{1}{2}$ gilt wegen (5. 24.)

$$\|\bar{b}-\bar{b}^{(\nu)}\| \le \|\bar{b}^{(\nu)}-\bar{b}^{(\nu-1)}\|.$$

In diesem Fall hat man für

$$\|\bar{b}^{(\nu)}-\bar{b}^{(\nu-1)}\| < \varepsilon$$

die Abschätzung

$$\|\bar{b}-\bar{b}^{(\nu)}\| < \varepsilon. \tag{5. 25.}$$

Für den Fall, dass

$$\|\bar{b}^{(\nu)}-\bar{b}^{(\nu-1)}\| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon,$$

$$q := \|A^T(x^*)\| < 1,$$

gilt hat man die Abschätzung

$$\|\bar{b}-\bar{b}^{(\nu)}\| < \varepsilon \tag{5. 26.}$$

also

$$\|\bar{b}_i-\bar{b}_i^{(\nu)}\| < \varepsilon,\quad i=1,2,\dots,n.$$

Es wird dabei natürlich vorausgesetzt, dass die Näherungen $\bar{b}^{(\lambda)}$, $\lambda = 0,1,...\nu,$ genau, also ohne Rundungsfehler, berechnet worden sind.

B. 5. 13.

Multipliziert man die Gleichung (5. 15.) von links mit y^T, so ergibt sich

$$y^T \bar{b} = x^T \tilde{b}^{+} \tag{5. 27.}$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \bar{b}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{b}_i^{+} . \tag{5. 28.}$$

Hieraus folgt eine ökonomische Interpretation des Koeffizienten $\bar{b}_i$ des $i-\text{ten}$ Ressourcenaufwands: Er gibt den Ressourcenaufwand pro Einheit der Endnachfrage an.

B. 5. 14.

Zur Lösung des Gleichungssystems (5. 14.) kann man das Gauß-Seidel-Verfahren [vgl. S. 3. 14.] anwenden, das gewöhnlich schneller konvergiert als das Verfahren (5. 16.) – (5. 17.) [vgl. B. 5. 16]:

$$\bar{b}_i^{(0)} := \tilde{b}_i^{(0)}(x^*),\ i = 1,2,...,n, \tag{5. 29.}$$

$$\bar{b}_i^{(\nu)} := \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^T(x^*)\bar{b}_j^{(\nu)} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij}^T(x^*)\bar{b}_j^{(\nu-1)} + \tilde{b}_i^{+}(x^*),\ i = 1,2,...,n;\ \nu \in N. \tag{5. 30.}$$

S. 5. 4.

Die durch (5. 29.) – (5. 30) erzeugte Folge $\{\bar{b}\},\ \nu \in N \cup \{0\}$, ist monoton wachsend.

Beweis (Induktion):

Induktionsanfang:

$$\bar{b}_i^{(1)} := \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^T(x^*)\bar{b}_j^{(1)} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij}^T(x^*)\bar{b}_j^{(0)} + \tilde{b}_i^{+}(x^*)$$

$$\geq \tilde{b}_i^{+}(x^*)$$

$$= \bar{b}_i^{(0)} .$$

Mit der Induktionshypothese

$$x^{(\nu)} \geq x^{(\nu-1)}$$

folgt durch eine zweite Induktion über i:

$(i=1)$:

$$\bar{b}_1^{(\nu+1)} = \bar{b}_1^{+}(x^*) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^T (x^*) \bar{b}_j^{(\nu)}$$

$$\geq \bar{b}_1^{+}(x^*) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^T (x^*) \bar{b}_j^{(\nu-1)}$$

$$= \bar{b}_1^{(\nu)} .$$

$(i \Rightarrow i+1)$:

$$\bar{b}_{i+1}^{(\nu+1)} = \bar{b}_{i+1}^{+}(x^*) + \sum_{j=1}^{i} a_{ij}^T (x^*) \bar{b}_j^{(\nu+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^T (x^*) \bar{b}_j^{(\nu)}$$

$$\geq \bar{b}_{i+1}^{+}(x^*) + \sum_{j=1}^{i} a_{ij}^T (x^*) \bar{b}_j^{(\nu)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^T (x^*) \bar{b}_j^{(\nu-1)}$$

$$= \bar{b}_{i+1}^{(\nu)} .$$

Daraus folgt

$$\bar{b}_i^{(\nu+1)} \geq \bar{b}_i^{(\nu)}, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

oder

$$\bar{b}^{(\nu+1)} \geq \bar{b}^{(\nu)} .$$

q. e. d.

<u>S. 5. 5.</u>

Das Verfahren (5. 29.) – (5. 30.) konvergiert gegen die einzige Lösung des Gleichungssystems (5. 14.).

Beweis:

Es gilt:

$$\bar{b}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^T (x^*) \bar{b}_j^{(\nu)} + \tilde{b}_i^{+}(x^*)$$

$$\bar{b}_i^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^T (x^*) \bar{b}_j^{(\nu)} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij}^T (x^*) \bar{b}_j^{(\nu-1)} + \tilde{b}_i^{+}(x^*), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\bar{b}_i - \bar{b}_i^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^T(x^*)(\bar{b}_j - \bar{b}_j^{(\nu)}) + \sum_{j=i}^{n} a_{ij}^T(x^*)(\bar{b}_j - \bar{b}_j^{(\nu-1)})$$

$$\left|\bar{b}_i - \bar{b}_i^{(\nu)}\right| \le \sum_{j=1}^{i-1}\left|a_{ij}^T(x^*)\right|\left|\bar{b}_j - \bar{b}_j^{(\nu)}\right| + \sum_{j=i}^{n}\left|a_{ij}^T(x^*)\right|\left|\bar{b}_j - \bar{b}_j^{(\nu-1)}\right|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Wegen (5. 18.) und

$$\|\bar{b} - \bar{b}^{(\nu)}\|_\infty \le \max_i |\bar{b}_i - \bar{b}_i^{(\nu)}|,$$

oder

$$\|\bar{b}_j - \bar{b}_j^{(\nu)}\| \le \|\bar{b} - \bar{b}^{(\nu)}\|_\infty, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

erhält man

$$|\bar{b}_i - \bar{b}_i^{(\nu)}| \le p_i \|\bar{b} - \bar{b}^{(\nu)}\|_\infty + q_i \|\bar{b} - \bar{b}^{(\nu-1)}\|_\infty \tag{5. 31.}$$

mit

$$p_i := \sum_{j=1}^{i-1}\left|a_{ij}^T(x^*)\right|, \qquad q_i := \sum_{j=i}^{n}\left|a_{ij}^T(x^*)\right|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Sei nun

$$|\bar{b}_s - \bar{b}_s^{(\nu)}| := \max_i |\bar{b}_i - \bar{b}_i^{(\nu)}|$$

$$= \|\bar{b} - \bar{b}^{(\nu)}\|_\infty .$$

Setzt man in (5. 30.) $i := s$, so erhält man

$$\|\bar{b} - \bar{b}^{(\nu)}\|_\infty \le p_s \|\bar{b} - \bar{b}^{(\nu)}\|_\infty + q_s \|\bar{b} - \bar{b}^{(\nu-1)}\|_\infty ,$$

d. h.

$$\|\bar{b} - \bar{b}^{(\nu)}\|_\infty \le \frac{q_s}{1 - p_s} \|\bar{b} - \bar{b}^{(\nu-1)}\|_\infty .$$

Daher hat man

$$\|\bar{b} - \bar{b}^{(\nu)}\|_\infty \le \rho \|\bar{b} - \bar{b}^{(\nu-1)}\|_\infty \tag{5. 32.}$$

mit

$$\sigma := \min_i \frac{q_i}{1 - p_i} . \tag{5. 33.}$$

Wir zeigen nun, dass

$$\sigma \le \left\| A^T(x^*) \right\|_\infty < 1$$

gilt:

$$p_i + q_i = \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij}^T(x^*) \right|$$

$$\le \left\| A^T(x^*) \right\|_\infty$$

$$< 1,$$

$$q_i \le \left\| A^T(x^*) \right\|_\infty - p_i ,$$

$$\frac{q_i}{1-p_i} \le \frac{\left\| A^T(x^*) \right\|_\infty - p_i}{1-p_i}$$

$$\le \frac{\left\| A^T(x^*) \right\|_\infty - p_i \left\| A^T(x^*) \right\|_\infty}{1-p_i}$$

$$= \left\| A^T(x^*) \right\|_\infty .$$

Damit gilt $\sigma \le \left\| A^T(x^*) \right\|_\infty < 1$ und

$$\| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty \le \sigma^\nu \, \| \bar{b} - \bar{b}^{(0)} \|_\infty ,$$

also

$$\lim_{\nu \to \infty} \bar{b}^{(\nu)} = \bar{b}.$$ *q. e. d.*

B. 5. 15.

Vergleicht man die Ungleichung

$$\| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty \le \ \| A^T(x^*) \|_\infty \cdot \| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu-1)} \|_\infty$$

für das Verfahren (5.16.) – (5. 17.) mit der Ungleichung

$$\| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \| \ \le \ \sigma \cdot \| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu-1)} \|$$

für das Verfahren (5. 29.) – (5. 30.), so folgt wegen $\sigma \le \| A^T(x^*) \|_\infty$, dass das zweite Verfahren gewöhnlich schneller konvergiert.

B. 5. 16.

Wegen (5. 33.) ist es zweckmäßig, bei der Anwendung des Verfahrens (5. 29.) – (5. 30.) das Gleichungssystem (5. 14.) so umzuschreiben, dass

$$q_1 := \sum_{j=1}^{n} | a_{ij}^T 8x^*) |$$

minimal ist.

S. 5. 6.

Für das Verfahren (5. 29.) – (5. 30.) gilt die Fehlerabschätzung

$$\| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty \leq \frac{\sigma}{1-\sigma} \cdot \| \bar{b}^{(\nu)} - \bar{b}^{(\nu-1)} \|_\infty \tag{5. 34.}$$

mit

$$\sigma := \max_i \frac{\sum_{j=i}^{n} | a_{ij}^T (x^*) |}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} | a_{ij}^T (x^*) |} \tag{5. 35.}$$

$$\leq \; \| A^T (x^*) \|_\infty .$$

Beweis:

Seien $\bar{b}^{(\nu)}$ und $\bar{b}^{(\nu+1)}$ zwei nacheinander folgende Näherungslösungen des Verfahrens (5. 29.) – (5. 30.). Analog den Überlegungen beim Beweis der Beziehung (5. 2.) lässt sich zeigen, dass

$$\| \bar{b}^{(\nu+1)} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty \; \leq \; \sigma \cdot \| \bar{b}^{(\nu)} - \bar{b}^{(\nu-1)} \|_\infty$$

gilt. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \| \bar{b}^{(\nu+\mu)} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty \; &\leq \; \| \bar{b}^{(\nu+\mu)} - \bar{b}^{(\nu+\mu-1)} \|_\infty + \| \bar{b}^{(\nu+\mu-1)} - \bar{b}^{(\nu+\mu-2)} \|_\infty + \ldots + \| \bar{b}^{(\nu+1)} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty \\ &\leq \sigma^\mu \| \bar{b}^{(\nu)} - \bar{b}^{(\nu-1)} \|_\infty + \sigma^{\mu-1} \| \bar{b}^{(\nu)} - \bar{b}^{(\nu-1)} \|_\infty + \ldots + \sigma \| \bar{b}^{(\nu)} - \bar{b}^{(\nu-1)} \|_\infty . \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{\mu \to \infty} \bar{b}^{(\nu+1)} = \bar{b}$$

ergibt sich die Behauptung. *q. e. d.*

B. 5. 17.

Aus (5. 34.) folgt speziell

$$\| \bar{b} - \bar{b}^{(\nu)} \|_\infty \;\le\; \frac{\sigma^\nu}{1-\sigma} \cdot \| \bar{b}^{(1)} - \bar{b}^{(0)} \|_\infty , \tag{5. 36.}$$

d. h.

$$| \bar{b}_i - \bar{b}_i^{(\nu)} | \;\le\; \frac{\sigma^\nu}{1-\sigma} \max_j | \bar{b}_j^{(1)} - \bar{b}_j^{(0)} |, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5. 36'.}$$

B. 3. 18.

Im Folgenden werden einige Beispiele für die Anwendung von Koeffizienten des direkten und vollen Ressourcenaufwands angeführt:

A. *Koeffizienten des direkten Ressourcenaufwands:*
   Diese lassen sich u. a. zur Berechnung folgender Größen verwenden:

   1) Anteil der verschiedenen im Sektor i, $i = 1, 2, \ldots, n$, eingesetzten Primärressourcen am Endprodukt der einzelnen Sektoren:

$$\frac{\tilde{b}_j^{+} (E - A^T (x^*))_{ij}^{-1} y_i}{y_i} = \tilde{b}_j^{+} (E - A^T (x^*))_{ij}^{-1} y_i , \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5. 37.}$$

   2) Anteil der verschiedenen in den einzelnen Sektoren eingesetzten Primärressourcen am Endprodukt der Volkswirtschaft:

$$\frac{\tilde{b}_i^{+} \sum_{j=1}^{n} (E - A^T (x^*))_{ij}^{-1} y_j}{\sum_{j=1}^{n} y_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5. 38.}$$

   3) Anteil der verschiedenen in den einzelnen Sektoren eingesetzten Primärressourcen an Bestandteilen des Endprodukts der Volkswirtschaft:

$$\frac{\tilde{b}_i^{+} \sum_{j=1}^{n} (E - A^T (x^*))_{ij}^{-1} c_j}{\sum_{j=1}^{n} c_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5. 39.}$$

$$\frac{\tilde{b}_i^{+} \sum_{j=1}^{n} (E - A^T (x^*))_{ij}^{-1} u_j}{\sum_{j=1}^{n} u_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5. 40.}$$

$$\frac{\tilde{b}_i^{+} \sum_{j=1}^{n} (E - A^T (x^*))_{ij}^{-1} v_j}{\sum_{j=1}^{n} v_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5. 41.}$$

Dabei sind:

$c_j,\ j=1,2,...,n:$ die individuelle Konsumtion des Sektors j,

$s_j,\ j=1,2,...,n:$ die gesellschaftliche Konsumtion des Sektors j,

$u_j,\ j=1,2,...,n:$ die Investitionen des Sektors j,

$v_j,\ j=1,2,...,n:$ der Export des Sektors j.

4) Einfache Ressourcenquote
Sie ist der reziproke Ausdruck des direkten Ressourcenaufwands:

$$\frac{1}{\tilde{b}_j^{+}} = \frac{x_j^*}{\tilde{b}_j}, \quad j=1,2,...,n. \tag{5. 42.}$$

B. Koeffizienten des vollen Ressourcenaufwands

Diese lassen sich. u. a. zur Berechnung folgender Größen verwenden:

1) Der Ressourcenaufwand eines Sektors zur Herstellung dessen Endprodukts:

$$\bar{b}_i \cdot y_i, \quad i=1,2,...,n \tag{5. 43.}$$

2) Der Ressourcenaufwand aller Sektoren zur Herstellung des Endprodukts der Volkswirtschaft:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \cdot y_i, \tag{5. 44.}$$

3) Der Ressourcenaufwand eines Sektors zur Realisierung der einzelnen Bestandteile des Endproduktes dieses Sektors:

$$\bar{b}_i \cdot c_i, \qquad \bar{b}_i \cdot s_i, \qquad \bar{b}_i \cdot u_i, \qquad \bar{b}_i \cdot v_i, \qquad i=1,2,...,n. \tag{5. 45.}$$

4) Der Ressourcenaufwand aller Sektoren zur Realisierung der einzelnen Bestandteile des Endproduktes der Volkswirtschaft:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \cdot c_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \cdot s_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \cdot u_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \cdot v_i. \tag{5. 46.}$$

5) Die komplexe Ressourcenquote:

$$\frac{1}{\tilde{b}_j}. \tag{5. 47.}$$

VI

Einige Elastizitätsaussagen

B. 6. 1.

Im Kapitel III [vgl. B. 3. 2.] haben wir uns bereits mit einer Sensitivitätsanalyse des statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodells mit kontrahierender Aufwandsfunktion befasst.

Wir haben die Frage gestellt und beantwortet, was mit der Lösung des genannten Problems geschieht, wenn man von einem Endnachfragevektor y auf einen anderen Endnachfragevektor $\tilde{y}$ übergeht. Damit verbunden wurde die Frage der Stabilität der Lösung diskutiert. Es wurde festgestellt, dass wegen der Stetigkeit von f^{-1} sich die Lösung bei kleinen Änderungen der Endnachfrage ebenfalls wenig ändert [vgl. S. 3. 3.].

In diesem Kapitel werden einige Elastizitätsaussagen zu statischen Verflechtungsmodellen mit nichtlinearen Aufwandsfunktionen hergeleitet.

S. 6. 1.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1.) (bzw. (P. 2. 1'.). Ferner möge folgendes gelten:

1.

$$L \subset R^n : \ \forall \left(x \in L, \ x > 0 \right) \ \Rightarrow \ \left\langle L \supset \text{ eine } U(x) \wedge L \supset \text{ eine } U(\alpha x), \ \forall \alpha \in \left]0, \ 1\right[\right\rangle .$$

2.

$$b_i : \ M_+^0 \to R_+^n, \ \ i = 1, 2, ..., n$$

mit

$$M_+^0 := \left\{ x \in M^0 \mid x \in R_+^n \right\},$$

$$M^0 := \left\{ x \in R^n \mid \ \|x\| < \delta, \ \delta > 0 : \text{ hinreichend groß} \right\}$$

und

$$\left\langle x^1 . x^2 \in M_+^0 : \ x^2 \geq x^1 \right\rangle \ \Rightarrow \ b_i(x^2) \geq b_i(x^1), \ \ i = 1, 2, ..., n .$$

3.

Das Problem (P. 2. 1.) (bzw. (P. 2. 1'.) ist streng lokal (schwach) lösbar [vgl. B. 2. 2.].

4.

Die Funktion $x - b(x) =: f(x)$ ist stetig in einer Umgebung von $\tilde{x}$ und ist ein lokaler Homomorphismus in $\tilde{x}$.

5.

Das Problem (P. 2. 1.) (bzw. (P. 2. 1'.) ist für $\bar{y} \in R_+^n$ mit

$$\begin{cases} \bar{y}_k > \tilde{y}_k & \text{für ein } k = 1,\dots,n \\ \bar{y}_i \le \tilde{y}_i & \text{für } i \ne k,\ i = 1,\dots,n \end{cases}$$

streng lokal lösbar; diese Lösung sei $\bar{x} > 0$ genannt mit

$$\bar{x}_l > \tilde{x}_l \text{ für mindestens ein } l = 1,\dots,n.$$

6.

$$\beta \bar{x} - b(\beta \bar{x}) \le \bar{x} - b(\bar{x}), \quad \forall \beta \in [0,\ 1].$$

Dann gilt:

A.

$$\frac{\bar{x}_i - \tilde{x}_i}{\tilde{x}_i} \le \frac{\bar{x}_k - \tilde{x}_k}{\tilde{x}_k}, \quad i = 1,\dots,n;$$

B.

$$\frac{\bar{x}_k - \tilde{x}_k}{\tilde{x}_k} \le \frac{(\bar{x}_k - b_k(\bar{x}_k)) - (\tilde{x}_k - b_k(\tilde{x}_k))}{\tilde{x}_k - b_k(\tilde{x}_k)},$$

falls noch zusätzlich die Voraussetzung

7.

$$\tilde{x}_k - b_k(\tilde{x}_k) > 0$$

gilt.

Beweis:

A.:

Sei $s \in R_+^n \setminus \{0\}$. Wegen der Voraussetzungen 4. – 5. gibt es ein $\bar{\varepsilon}$, derart dass für alle $\varepsilon \in [0,\ \bar{\varepsilon}]$ ein $\tilde{x}_\varepsilon \in L$ mit der Eigenschaft

$$\tilde{x}_\varepsilon - b(\tilde{x}_\varepsilon) = \tilde{x} - b(\tilde{x}) + \varepsilon s$$

existiert, wobei $\tilde{x}_\varepsilon$ eine stetige Funktion von ε ist und für alle $\varepsilon \in [0, \ \bar{\varepsilon}]$ gilt:

$$\tilde{x}_i > 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \tilde{x}_\varepsilon = \tilde{x}, \qquad (6.\ 1.)$$

$$0 < \min_i \{\tilde{x}_{\varepsilon_i} / \tilde{x}_i\} < 1.$$

Nehmen wir an, dass

$$\bar{x}_k / \tilde{x}_{\varepsilon_k} < \tilde{x}_i / \tilde{x}_{\varepsilon_i} \quad \text{für ein } i = 1, 2, ..., n$$

ist. Sei ferner

$$B := \{i \,|\, (\tilde{x}_{\varepsilon_i} / \bar{x}_i) = \beta_\varepsilon\}$$

mit

$$\beta_\varepsilon := \min_i \{\tilde{x}_{\varepsilon_i} / \bar{x}_i\}.$$

Offensichtlich ist $k \notin B.$

Aus

$$\tilde{x}_\varepsilon \geq \beta_\varepsilon \bar{x}$$

folgt

$$\tilde{x}_{\varepsilon_i} - b_i(\tilde{x}_i) \leq \beta_\varepsilon \bar{x}_i - b_i(\beta_\varepsilon \bar{x}), \quad i \in B$$

und

$$\tilde{x}_\varepsilon - b_i(\beta_i \bar{x}_i) \leq \bar{x}_i - b_i(\beta_i \bar{x}), \quad i \in B.$$

Damit gilt

$$\tilde{x}_i - b_i(\bar{x}) + \varepsilon s_i \leq \bar{x}_i - b_i(\bar{x}), \quad i \in B.$$

Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung 5.

Daher gilt:

$$\bar{x}_k / \tilde{x}_{\varepsilon_k} \geq \bar{x}_i / \tilde{x}_{\varepsilon_i}, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad \varepsilon \in]0, \ \bar{\varepsilon}[$$

und

$\bar{x}_i / \tilde{x}_i = \bar{x}_k / \tilde{x}_k$ $\because$ (6. 1.))

B:

Die Behauptung lässt sich durch eine unmittelbare Anwendung des nachfolgenden Lemmas beweisen. q. e. d.

L. 6. 1.

Sei

$$a := (a_k) \in R_+^n \setminus \{0\}$$

$$b := (b_k) \in R_+^n \setminus \{0\}$$

$$\eta := a_k / b_k, \quad a_k, b_k \neq 0$$

$$\{a, b, \eta b\} \subset \tilde{M} \subset R_+^n$$

$$\{\alpha, \beta, \eta\beta\} \subset \Delta \subset R^1, \quad \alpha, \beta \in R^1, \quad \alpha > 0$$

$$f(x, \delta): \tilde{M} \to R^1, \ \forall \delta \in \Delta$$

$$\left.\begin{array}{r} f(a,\alpha) \geq f(\eta b, \alpha) \\ f(\eta b, \alpha) \geq f(\eta b, \eta\beta) \end{array}\right\} \quad \alpha > \eta\beta$$

$$\eta f(b, \beta) \leq f(\eta b, \eta\beta)$$

$$a_k = f(a, \alpha), \quad b_k = f(b, \beta).$$

Dann gilt:

$$\frac{b_k - a_k}{a_k} \leq \frac{\beta - \alpha}{\alpha}.$$

B. 6. 2.

Die Voraussetzung 4 im S. 6. 1. ist erfüllt, wenn z.B. die Funktion $x - b(x) =: f(x)$ stetig und deren Jacobische Matrix für $\tilde{x}$ regulär ist.

B. 6. 3.

Die Voraussetzung 5 in S. 6. 1. heißt:

Erhöht sich die Endnachfrage eines Sektors (während die der anderen sich nicht ändert), dann ist eine Gesamtproduktion echt möglich, wobei mindestens ein Sektor mehr produziert als vorher.

B. 6. 4.

Die Voraussetzung 6 in S. 6. 1. heißt:

Reduziert man die Gesamtproduktion aller Sektoren so erhöht sich die Endnachfrage keines der Sektoren im Vergleich zu vorher.

Diese Voraussetzung ist erfüllt, wenn z.B. (B. 9.) erfüllt ist. Denn aus $\bar{x}_i - b(\bar{x}) \geq 0$ und (B. 9.) folgt für $\beta \in]0,\ 1[$, $\lambda = 1/\beta$ und $x = \beta \bar{x}$ die Voraussetzung 6. Die Bedingung (B. 9.) ist jedoch wesentlich stärker als die Voraussetzung 6 in S. 6. 1.

B. 6. 5.

Unter den angegebenen Voraussetzungen besagt die Behauptung des Satzes S. 6. 1.:

A. Die prozentuale Änderung der Gesamtproduktion keines der Sektoren ist größer als die des Sektors, dessen Endnachfrage erhöht würde.
B. Die prozentuale Änderung der Gesamtproduktion des Sektors, dessen Endnachfrage erhöht wurde, ist nicht größer als die prozentuale Änderung der Endnachfrage des genannten Sektors, falls dieser Sektor auch vorher eine Endnachfrage hatte.

S. 6. 2.

Gegeben sei das Problem (P. 2. 1.) (bzw. (P. 2. 1'.) in der Form

$$y_i = f_i(x), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

(bzw. in der Form $y = f(x)$)

mit

$$f_i(x) := x_i - b_i(x), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

(bzw. $f(x) := x - b(x)$).

Ferner möge folgendes gelten:

1.

$$\bar{x}, \bar{\bar{x}} > 0, \quad \bar{\bar{x}} \geq v,$$

$$\lambda^* := \alpha \min_i \frac{v_i}{\bar{\bar{x}}_i}, \qquad \alpha \in]0,\ 1[.$$

2.

$$P \subset R^n : \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in P,$$

$$\forall (x \in P, x > 0) \ \Rightarrow \ \langle P \supset \text{eine } U(x) \wedge P \supset \text{eine } U(\lambda x), \forall \lambda \in]\lambda^*,\ 1[\rangle.$$

3.

$f : P \to R^n$: stetig:

$$\forall\left(x^1, x^2 \in P,\ x^1 \le x^2\right) \ \Rightarrow\ f(x^1) \le f(x^2).$$

4.

$$\bar{y}, \bar{\bar{y}} \in R_+^n\!:\ f(\bar{x}) = \bar{y} \wedge f(\bar{\bar{x}}) = \bar{\bar{y}}.$$

5.

$$\left\langle \bar{x}_l = \bar{\bar{x}}_l,\ \ \bar{x}_i \le \bar{\bar{x}}_i,\ i \ne l;\ i = 1, 2, \dots, n \right\rangle \ \Rightarrow\ \bar{\bar{x}}_l \le \bar{\bar{y}}_l\,.$$

6.

$$\bar{\bar{y}}_k > \bar{y}_k\,, \qquad \bar{\bar{y}}_i \le \bar{y}_i\,, \quad i \ne k;\ i = 1, 2, \dots, n.$$

7.

$$\bar{x}_l < \tilde{x}_l\,, \quad \text{für mindestens ein } l = 1, 2, \dots, n.$$

8.

$$f(\lambda \tilde{x}) \le f(\bar{x}), \quad \forall \lambda \in \left]\lambda^*,\ 1\right[.$$

9. $f(x)$ ist ein lokaler Homomorphismus in $\bar{x}$.

Dann gilt:

A.

$$\frac{\tilde{x}_i - \bar{x}_i}{\tilde{x}_i} \le \frac{\tilde{x}_k - \bar{x}_k}{\tilde{x}_k}, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

B.

$$\frac{\tilde{x}_k - \bar{x}_k}{\tilde{x}_k} \le (1 - \vartheta).$$

Falls zusätzlich folgendes gilt:

10.

$$f_k(\tilde{x}) > 0.$$

11.

$$f_k(\tilde{x})t(\lambda) = f_k(\lambda \tilde{x}), \quad \forall \lambda \in \left]\lambda^*,\ 1\right[,$$

wobei $t(\lambda)$ eine auf $\left]\lambda^*,\ 1\right[$ definierte, streng monoton fallende Funktion ist.

12.

$$\bar{y}_k = t(\vartheta)\tilde{y}_k, \quad \vartheta \in \left]\lambda^*,\ 1\right[.$$

Beweis:

Sei $s \in R_+^n \setminus \{0\}$. Wegen der Bedingung 9. gibt es ein $\bar{\varepsilon}$ derart, dass für alle $\varepsilon \in]0,\ \bar{\varepsilon}[$ ein $\bar{x}_\varepsilon \in P$ mit der Eigenschaft

$$f(\bar{x}_\varepsilon) = f(\bar{x}) - \varepsilon s$$

existiert, wobei $\bar{x}_\varepsilon$ eine stetige Funktion von ε ist und für alle $\varepsilon \in]0,\ \bar{\varepsilon}[$ gilt:

$$\bar{x}_\varepsilon > 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \bar{x}_\varepsilon = \bar{x},$$

$$\lambda_\varepsilon := \min_i \{\bar{x}_\varepsilon / \tilde{x}_\varepsilon\}; \qquad \lambda_\varepsilon \in \left]\lambda^*,\ 1\right[.$$

Nehmen wir an, dass

$$\frac{\bar{x}_{\varepsilon_i}}{\tilde{x}_i} < \frac{\bar{x}_{\varepsilon_k}}{\tilde{x}_k} \qquad \text{für ein } i = 1, 2, \ldots, n$$

gilt. Sei ferner

$$\Lambda := \{i \mid \bar{x}_{\varepsilon_i} / \tilde{x}_i = \lambda_i\}.$$

Offensichtlich gilt $k \notin \Lambda$.

Aus

$$\bar{x}_\varepsilon \geq \lambda_\varepsilon \tilde{x}$$

folgt

$$f_i(\bar{x}_\varepsilon) \geq f_i(\lambda_\varepsilon \tilde{x}), \quad i \in \Lambda$$

und

$$f_i(\lambda_\varepsilon \tilde{x}) \geq f_i(\tilde{x}), \quad i \in \Lambda,$$

was der Voraussetzung 6. widerspricht. Damit gilt die Behauptung [Vgl. den Beweis von

S. 6. 1. A.].

B.

Aus den Voraussetzungen 10. – 12. und

$$\lambda = \bar{x}_k / \tilde{x}_k$$

folgt

$$\bar{x}_k = \lambda \tilde{x}_k, \quad \lambda \in \left]\lambda^*, 1\right[.$$

Man erhält ferner

$$\bar{x} \geq \lambda \tilde{x}, \quad \lambda \in \left]\lambda^*, 1\right[. \qquad (\because \text{ S. 6. 1. A.})$$

Es gilt also

$$\left.\begin{matrix} f_k(\bar{x}) \geq f_k(\lambda \tilde{x}) \\ f_k(\lambda \tilde{x}) = t(\lambda)\, \tilde{y}_k \end{matrix}\right\}, \quad \lambda \in \left]\lambda^*, 1\right[.$$

Damit erhält man:

$$\frac{\bar{y}_k}{\tilde{y}_k} \geq t(\lambda), \qquad \lambda \in \left]\lambda^*, 1\right[,$$

$$\frac{\bar{y}_k}{\tilde{y}_k} = t(\vartheta).$$

Dies bedeutet, dass

$$\lambda \geq \vartheta$$

gilt, was sich als Behauptung des Satzes S. 6. 2. (B) schreiben lässt. *q. e. d.*

B. 6. 6.

Satz S. 6. 2. beinhaltet weitere Elastizitätsaussagen für eine umgeformte Fassung des Problems (P. 2. 1'.). In dieser Form wird die Endnachfrage als eine Funktion der Gesamtproduktion betrachtet. Dabei wird u. a. vorausgesetzt:

- Die Endnachfragefunktion ist stetig und monoton wachsend.
- Das Problem ist für die zwei Endnachfragevektoren $\tilde{y}, \bar{y}$ lösbar; die entsprechenden Gesamtproduktionsvektoren seien mit $\tilde{x}, \bar{x}$ bezeichnet.

- Wird die Gesamtproduktion der einzelnen Sektoren nicht reduziert, während die Gesamtproduktion eines Sektors gleich bleibt, so nimmt die Endnachfrage dieses Sektors nicht ab.
- Die Endnachfrage von nur einem Sektor wird erhöht, während die der anderen Sektoren nicht erhöht wird.
- Die Gesamtproduktion von mindestens einem Sektor wird reduziert.

Unter den angegebenen Voraussetzungen besagt S. 6. 2. A:

Die prozentuale Änderung der Gesamtproduktion keines der Sektoren ist größer als die des Sektors, dessen Endnachfrage erhöht wurde.

<u>B. 6. 7.</u>

Neben den in S. 6. 2. B. angeführten Abschätzungen für die prozentuale Änderung der Gesamtproduktion der einzelnen Sektoren lassen sich für die Größe

$$\frac{\tilde{x}_i - \bar{x}_i}{\tilde{x}_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

bzw.

$$\frac{\tilde{x}_k - \bar{x}_k}{\tilde{x}_k}$$

auch andere Abschätzungen angeben.

Sei z.B. $z > 0$ gegeben, wobei

$$\frac{1}{1-\vartheta}(f_k(\vartheta \tilde{x}) - f_k(\tilde{x})) \geq z$$

gelten möge. Dann gilt unter Berücksichtigung von

$$\bar{y}_k = f_k(\vartheta \tilde{x})$$

die Abschätzung

$$\frac{\tilde{x}_i - \bar{x}_i}{\tilde{x}_i} \leq \frac{\tilde{y}_k - \bar{y}_k}{z}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6. 2.}$$

VII

Optimierung des Input-Output-Modells

D. 7. 1.

Mit (P. 7. 1.) möge folgender Spezialfall von (P. 2. 1.) bezeichnet sein, wobei die Aufwandsfunktion $b:\ R^1_+ \to R^n_+$ die Bedingungen (B. 3.) und (B. 4.) erfüllt:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x_j) + y_i$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j)\cdot x_j + y_i, \quad i = 1,2,...,n. \qquad \text{(P. 7. 1.)}$$

Hier sind die Funktionen $a_{ij},\ i, j = 1,2,...,n,$ stetig differenzierbar, und es gilt $a_{ij} \geq 0,\ i, j = 1,2,...,n.$

B. 7. 1.

(P. 7. 1.) lässt sich formal in der Gestalt

$$x = A(x)x + y \qquad \text{(7. 1.)}$$

darstellen [vgl. S. 2. 9.], wobei die in der Definition D. 7. 1. festgelegten Voraussetzungen vorliegen müssen.

D. 7. 2.

Als Problem (OP. 7. 1.) sei folgende *Optimierungsaufgabe* bezeichnet:

$$Max\{z = c^T(x - A(x)x) \mid x \in M\} \qquad \text{(OP. 7. 1.)}$$

$$M := \left\{ x \in R^n_+ \mid x - A(x)x \geq y,\ y \in R^n_+,\ \tilde{b}(x) \leq \tilde{b}\ \ \tilde{b} > 0 \right\}.$$

Hier sind:

$c := (c_i) \in R^n,\ c_i \geq 0$ für mindestend ein $i = 1,2,...,n,$

$\tilde{b}(x):$ die zur Realisierung des Gesamtproduktionsvektors x benötigte Primärressource,

$\tilde{b} > 0:$ die verfügbare Primärressourcenmenge.

B. 7. 2.

Die Primärressourcenfunktion hat oft die Form:

$$\tilde{b}(x) := \sum_{j=1}^{n} b_j(x_j)\,. \tag{7. 2.}$$

B. 7. 3.

Im Weiteren mögen folgende <u>Voraussetzungen</u> gelten:

V1(1) Die Funktion $(E - A(x))x =: f(x)$ ist für alle $x \in R_+^n$ stetig;

V1(2) Das Problem (P. 7. 1.) (bzw. (7. 1.)) ist eindeutig global lösbar;

V1(3) Sei

$$x := (E - A(x))^{-1} y$$

die Lösung von (7. 1.). Dann sind die Elemente der Matrix $(E - A(x))^{-1}$ stetig für alle $x \in R_+^n$;

V1(4)

$$\left\langle x^1 - A(x^1)x^1 \geq x^2 - A(x^2)x^2,\ \forall x^1, x^2 \in R_+^n \right\rangle \quad \Rightarrow \quad x^1 \geq x^2.$$

V2 Die Funktionen $\left[(E - A(x)x)\right]_i =: f_i(x),\ i = 1, 2, ..., n,$ sind für alle $x \in R_+^n$ konvex;

V3(1) $\left.\begin{array}{l} i)\ \tilde{b}(x) \geq 0 \\ ii)\ \tilde{b}(x) \text{ ist stetig} \end{array}\right\} \forall x \in R_+^n;$

V3(2) $\left\langle x^1 \geq x^2;\ x^1 \neq x^2 \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \tilde{b}(x^1) > \tilde{b}(x^2);$

V3(3) $\tilde{b}(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \geq \lambda b(x^1) + (1-\lambda)\tilde{b}(x^2)\,, \quad \forall \lambda \in \left]0,\ 1\right[;\ \ \forall x^1, x^2 \in R_+^n;$

V3(4) $\forall k_1 = const > 0\ \exists k_2 = const > 0:\ \tilde{b}(\tilde{x}) \geq k_1$ für $\forall(\tilde{x} \in R_+^n \wedge \| \tilde{x} \| \geq k_2).$

S. 7. 1.

Gegeben sei das Problem (OP. 7. 1.). Dann gilt:

$$\tilde{b}((E - A(x))^{-1} y) \leq \tilde{b} \quad \Leftrightarrow \quad M \neq \varnothing\,.$$

Beweis:

($\Rightarrow$)

Diese Implikation ist offensichtlich.

($\Leftarrow$)

Sei

$$\tilde{b}((E-A(x))^{-1}y) > \tilde{b}\,. \tag{7. 3.}$$

Dann folgt aus $x \in R_+^n$ und $(E-A(x))x \geq y$:

$$x \geq (E-A(x))^{-1}y,$$

$$\tilde{b}(x) \geq \tilde{b}((E-A(x))^{-1}y)$$

$$\geq \tilde{b}. \qquad (\because \text{ V3(2)})$$

Dies widerspricht aber der Behauptung $\tilde{b}(x) \leq \tilde{b}$. Daher ist die Annahme falsch, und es gilt die Behauptung. *q. e. d.*

S. 7. 2.

Gegeben sei das Problem (OP. 6. 1.). Dann gilt:

$$\tilde{b}((E-A(x))^{-1}y) \leq \tilde{b} \quad \Rightarrow \quad M \text{ ist kompakt.}$$

Beweis:

Die Beschränktheit von M folgt aus:

$$\tilde{b}(\tilde{x}) \to \infty \quad \text{für } \|\tilde{x}\| \to \infty. \qquad (\because \text{ V3(4)}) \tag{7. 4.}$$

Sei nun $\{\tilde{x}^{(\nu)}\}$, $\nu \in N \cup \{0\}$, eine Folge in M mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} \tilde{x}^{(\nu)} = \tilde{x}$ in R_+^n. Offensichtlich gilt dann $\tilde{x} \in R_+^n$. Wird mindestens eine der Ungleichungen

$$(E-A(\tilde{x}))\tilde{x} \geq y,$$

$$\tilde{b}(\tilde{x}) \leq \tilde{b}$$

verletzt, so stellt dies einen Widerspruch zu V1(1) und V3(1) dar. Damit ist M abgeschlossen.

q. e. d.

S. 7. 3.

Gegeben sei das Problem (OP. 6. 1.). Dann gilt:

$$\left\langle \tilde{b}((E-A(x))^{-1}y)\tilde{b} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \exists x^* \in M : c^T((E-A(x^*))x^* = \sup_{x\in M} c^T((E-A(x)x) \right\rangle.$$

Beweis:

Die Behauptung folgt unmittelbar aus S. 7. 1. und S. 7. 2. *q. e. d.*

S. 7. 4.

Gegeben sei das Problem (OP. 6. 1.). dann gilt:

$$\left\langle \tilde{b}((E-A(x))^{-1}y) = \tilde{b} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \left\langle M = \left\{ (E-A(x))^{-1}y \right\} \right\rangle.$$

Beweis:

$$\left\langle \tilde{b}((E-A(x))^{-1}y) = \tilde{b}, \quad x \in M \right\rangle \quad \Rightarrow \quad x \geq (E-A(x))^{-1}y.$$

ist nun $x \neq (E-A(x))^{-1}y$, dann folgt wegen V3(2):

$$\begin{aligned} \tilde{b}(x) &> \tilde{b}((E-A(x))^{-1}y) \\ &= \tilde{b}, \end{aligned}$$

was zum Widerspruch führt. *q. e. d.*

S. 7. 5.

Gegeben sei das Problem (OP. 7. 1.). Sei

$$\tilde{b}((E-A(x))^{-1}y) < \tilde{b}.$$

dann existiert für jedes $i = 1,2,\ldots,n$ ein eindeutiges $\beta_i > 0$, derart dass

$$\tilde{b}((E-A(x))^{-1}(y+\beta_i e^i)) = \tilde{b}$$

gilt. Hier ist e^i, $i = 1,2,\ldots,n,$ der Einheitsvektor mit der Komponente Eins an der $i-$ten Stelle.

Beweis:

Es gilt:

$$\tilde{b}((E-A(x))^{-1}y) - \tilde{b} < 0,$$

$$\left.\begin{aligned} (E-A(x))^{-1}(y+\alpha_i e^i) &\geq (E-A(x))^{-1}(y+\beta_i e^i) \\ (E-A(x))^{-1}(y+\alpha_i e^i) &\neq (E-A(x))^{-1}(y+\beta_i e^i) \end{aligned}\right\}, \ \forall \alpha_i, \beta_i \geq 0.$$

Die Komponenten $(E - A(x))^{-1}(y + \beta_i e^i)$ sind in β_i stetig, und es gilt

$$\| (E - A(x))^{-1}(y + \beta_i e^i) \| \to \infty, \quad \text{wenn } \beta_i \to \infty.$$

Aus V3(2) und ((6. 4.) folgt nun, dass die Funktion $\tilde{b}((E - A(x))^{-1}(y + \beta_i e^i)),\ \beta_i \geq 0,$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion in β_i ist, derart dass

$$\tilde{b}((E - A(x))^{-1}(y + \beta_i e^i)) \to \infty, \quad \text{wenn } \beta_i \to \infty.$$

Damit existiert ein eindeutiges β_i, derart dass

$$\tilde{b}((E - A(x))^{-1}(y + \beta_i e^i)) = \tilde{b}$$

gilt. *q. e. d.*

B. 7. 4.

Die bisherigen Ergebnisse dieses Kapitels lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Ausgehend von einem Spezialfall von (P. 2. 1.), wobei die Aufwandsfunktion jedes Sektors nur von der Gesamtproduktion dieses Sektors abhängig und dessen Funktion des direkten spezifischen Aufwands stetig differenzierbar und nichtnegativ ist (bezeichnet als (P. 7. 1)), wird ein nichtlineares statisches volkswirtschaftliches Optimierungsmodell des Verflechtungstyps untersucht. Maximiert wird die nach den einzelnen Sektoren gewogene Endnachfrage der Volkswirtschaft unter der Bedingung, dass

1. jeder Sektor mindestens dessen Endnachfrage sichert;
2. die verfügbare Menge der einzig vorhandenen Primärressource beschränkt ist;

Die Untersuchung erfolgt u. a. unter folgenden Voraussetzungen:

- Die Endnachfragefunktion aller Sektoren bezüglich der Gesamtproduktion ist stetig, monoton wachsend und konvex.
- Das der Optimierungsaufgabe (OP. 7. 1.) zugrunde liegende statische volkswirtschaftliche Verflechtungsmodell mit nichtlinearen Aufwandsfunktionen
  (P. 7. 1.) ist eindeutig global lösbar; die Elemente der entsprechenden Inversen sind bezüglich der Gesamtproduktion stetig;
- Die Primärressourcenfunktion nimmt nur nichtnegative Werte an und ist stetig, streng monoton wachsen und konvex.

Unter den angeführten Bedingungen werden dann folgende Aussagen bewiesen:

1) Das Optimierungsproblem (OP. 7. 1.) hat genau dann eine zulässige Lösung, wenn bei der Realisierung der Lösung von (P. 7. 1.) die Primärressourcenmenge höchstens ausgeschöpft wird.
2) Wenn bei der Realisierung der Lösung von (P. 7. 1.) die Primärressource höchstens ausgeschöpft wird, dann hat das Optimierungsproblem (OP. 7. 1.) Optimallösungen [Vgl . S. 7. 2].

3) Wenn bei der Realisierung der Lösung von (P. 7. 1.) die Primärressource voll ausgeschöpft wird, dann hat das Optimierungsproblem (OP. 7. 1.) genau eine zulässige Lösung, die gleichzeitig die Optimallösung dieses Problems darstellt [Vgl. S. 7. 4)].
4) Wenn bei der Realisierung der Lösung von (P. 7. 1.) die Primärressource nicht voll ausgeschöpft wird, so lässt sich dies auch durch die Erhöhung der Endnachfrage in einem einzigen Sektor erreichen. Diese Erhöhung kann jedoch nur auf *eine* Weise erfolgen [Vgl. S. 7. 5.].

B. 7. 5.

Sei

$$\tilde{b}((E-A(x))^{-1}y)<\tilde{b},$$

$$N:=\{\delta\in R_+^n \mid \tilde{b}((E-A(x))^{-1}(y+\delta))\le\tilde{b}\}.$$

Für jede Lösung x^* des Problems (OP. 6. 1.) gilt

$$(E-A(x^*))x^*=y+\delta,\quad \delta\in R_+^n.$$

Damit x^* eine Lösung des Problems (OP. 6. 1.), wenn $(E-A(x^*))x^*=y+\delta$ gilt und δ eine Lösung des Problems

$$Max\{c^T(y+\delta)\mid\delta\in N\} \qquad \text{(OP. 7. 2.)}$$

ist.

S. 7. 6.

Es gilt:

1.

$$T:=\{\delta\in R_+^n \mid \tilde{b}((E-A(x))^{-1}(y+\delta))>\tilde{b}\}\ne\emptyset.$$

2.

T ist konvex.

Beweis:

1.

Vgl. den Beweis von S. 7. 5.

2.

Sei

$$u^1,u^2\in R_+^n:$$

$$\tilde{b}((E-A(x))^{-1}(y+u^1)) > \tilde{b}$$

$$\tilde{b}((E-A(x))^{-1}(y+u^2)) > \tilde{b}.$$

Ferner sei

$$x = (E-A(x))^{-1}(y+\lambda u^1 + (1-\lambda)u^2), \quad \lambda \in \left]0,\ 1\right[,$$

$$\left.\begin{array}{l}(E-A(x^1))x^1 = y+u^1 \\ (E-A(x^2))x^2 = y+u^2\end{array}\right\}, \quad x^1, x^2 \in R_+^n.$$

Man erhält:

$$(E-A(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2))(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2) \le \lambda(E-A(x^1))+(1-\lambda)(E-A(x^2))x^2 \qquad (\because \text{(V2)})$$

$$= y+\lambda u^1+(1-\lambda)u^2$$

$$= (E-A(x))x.$$

Es gilt also

$$(E-A(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2))(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2) \le (E-A(x))x$$

und daher

$$x \ge \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2.$$

Es gilt ferner

$$\tilde{b}(x) \ge \tilde{b}(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2) \qquad (\because \text{(V3(2)),(V3(3))})$$

$$\ge \lambda \tilde{b}(x^1) + (1-\lambda)\tilde{b}(x^2)$$

$$> \tilde{b},$$

womit die Konvexität von T nachgewiesen ist. *q. e. d.*

S. 7. 7.

Es gilt

$$\{\beta_i e^i \mid i=1,2,\ldots,n\} \subset N \subseteq \left\{\delta \in R_+^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\beta_i} \le 1\right\}.$$

Beweis:

Die erste Inklusion ist offensichtlich [Vgl. S. 7. 5.].

Sei nun

$$\vartheta \in]1, \infty[$$

mit

$$\lambda \in R_+^n: \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\beta_i} = \vartheta.$$

Dann gilt:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \vartheta \beta_i e^i; \qquad \eta_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n; \qquad \sum_{i=1}^{n} \eta_i = 1.$$

Man erhält ferner

$$\left\{ \nu \beta_o e^i \mid i = 1, 2, ..., n \right\} \subset T. \qquad (\because \text{S. 7. 5.})$$

Aus der Konvexität von T folgt $\lambda \in T$. Für jedes $\delta \in N$ gilt also

$$\delta \in \left\{ \delta \in R_+^n \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\beta_i} \leq 1 \right\}. \qquad \textit{q. e. d.}$$

S. 7. 8.

Gegeben sei das Problem (OP. 7. 1.). Sei

$$\tilde{b}(E - A(x))^{-1} < \tilde{b}.$$

Dann stellt

$$x = (E - A(x))^{-1}(y + \beta_j e^j)$$

mit

$$c^T(y + \beta_j e^j) \geq c^T(y + \beta_i e^i), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

eine Lösung des Problems (OP. 7. 1.) dar.

Beweis:

Die Behauptung folgt unmittelbar aus S. 7. 7. unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Menge

$$\tilde{N} := \left\{ \delta \in R_+^n \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\beta_i} \leq 1 \right\}$$

eine konvexe Polytope ist mit den Exremalpunkten $0,\ \beta_1 e^1, \beta_2 e^2, ..., \beta_n e^n$, und das die konvexe Funktion $c^T(y + \cdot)$ ihr Maximum in einem Extremalpunkt von $\tilde{N}$ annimmt. *q. e. d.*

B. 7. 6.

In B. 7. 5. haben wir ein Maximierungsproblem (OP. 7. 2.) formuliert, in dessen linearer Zielfunktion eine zusätzlich Endnachfrage $\delta \in R_+^n$ als Variable vorkommt. Die einzige Beschränkung dieses Problems besteht darin, dass bei der Realisierung dieser zusätzlichen Endnachfrage die verfügbare Menge an der Primärressource höchstens erschöpft wird.

Es stellt sich nun u. a. folgender Zusammenhang zwischen den beiden Optimierungsproblemen (OP. 7. 1.) und (OP. 7. 2.) heraus:

x^* ist eine Optimallösung von (OP. 7. 1.), wenn

1. die Verflechtungsbedingungen in (OP. 7. 1.) als Gleichung erfüllt werden;
2. δ eine Optimallösung des Problems (OP. 7. 2.) ist.

B. 7. 7.

Betrachtet sei das Problem

$$\max\left\{p^T(E-A(x)x \mid x \in Z\right\} \qquad \text{(OP. 7. 3.)}$$

mit

$$Z := \left\{x \in R_+^n \mid (E-A(x))x \geq y,\ \tilde{b}(x) \leq \tilde{b},\ x \leq \tilde{x}\right\},$$

wobei nun lediglich die Voraussetzung V1 gelten möge.

Hier sind:

$\tilde{b}: R_+^m \to R_+^n:$ stetig mit der Eigenschaft:

$$\left\langle x^1 \geq x^2, x^1, x^2 \in R_+^n \right\rangle \Rightarrow \tilde{b}(x^1) \geq \tilde{b}(x^2),$$

$$p := (p_i) \in R_+^n, \qquad \tilde{b} := (\tilde{b}_i) \in R_+^n, \qquad x := (x_i) \in R_+^n.$$

Es lässt sich leicht nachweisen:

1. $Z \neq \varnothing \Leftrightarrow \tilde{b}((E-A(x))^{-1}y) \leq \tilde{b} \ \wedge\ (E-A(x))^{-1}y \leq \tilde{x}.$
2. Unter der Voraussetzung, dass

   i) $Z \neq \varnothing$,

   ii) die Funktionen $\left[(E-A(x))x\right]_i := f_i(x)$ sind für alle $x \in R_+^n$ konkav. (Zum Beispiel, wenn in

   $$\left[(E-A(x))x\right]_i := x_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x_j),\ i = 1, 2, ..., n,$$

   die Funktionen $b_{ij}(x_j),\ j = 1, 2, ..., n,$ für alle $x_j \in R_+^1,\ j = 1, 2, ..., n,$ konvex sind.)

   iii) $\tilde{b}_i(x),\ i = 1, 2, ..., m,$ sind für alle $x \in R_+^n$ konvex

(Zum Beispiel, wenn (für $m = 1$) in $\tilde{b}(x) := \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j(x_j)$ die Funktionen

$\tilde{b}_j(x_j),\ j = 1, 2, ..., n,$ für alle $x_j \in R_+^1,\ j = 1, 2, ..., n,$ konvex sind.),

ist Z kompakt und konvex. Damit existiert ein Punkt in R_+^n, in dem die Zielfunktion in (OP. 7. 3.) bezüglich der Menge Z ein absolutes Maximum annimmt. Jedes relative Maximum dieses Problems ist dabei ein absolutes Maximum.

B. 7. 8.

In B. 7. 7. haben wir ein Optimierungsproblem (OP. 7. 3.) betrachtet, bei dem die nach den einzelnen Sektoren gewogene Endnachfrage der Volkswirtschaft in Abhängigkeit von deren Gesamtproduktion maximiert wird. Werden alle Gewichte gleich Eins gewählt, so handelt es sich um die Maximierung des Gesamtproduktes.

Die Beschränkungen des Problems lauten:

1. Die Gesamtproduktion muss mindestens die Endnachfrage sichern.
2. Die Primärressourcen (im Allgemeinen mehrere) werden höchstens ausgeschöpft.
3. Für die Gesamtproduktion gilt eine Höchstschranke.

Es sei dabei bemerkt, dass hier von den in B. 7. 3. gemachten Voraussetzungen nur die erste außer der Konvexität gelten soll. Außerdem werden die Primärressourcenfunktionen als stetig und monoton wachsend vorausgesetzt.

Für das Optimierungsproblem (OP. 7. 3.) gilt nun folgende Aussage:

Das Problem (OP. 7. 3.) hat genau dann eine zulässige Lösung, wenn die Primärressourcen höchstens ausgeschöpft werden.

Unter den zusätzlichen Bedingungen, dass

4. eine zulässige Lösung gefunden werden kann,
5. die Endnachfragefunktionen bezüglich der Gesamtproduktion konkav sind,
6. die Primärressourcenfunktionen konvex sind,

kann man beweisen, dass in (OP. 7. 3.) jedes relative Maximum gleichzeitig ein absolutes Maximum ist.

VIII

Das Input-Output-Modell mit Intervallkoeffizienten

D. 8. 1. **(Das Leontief-Modell mit Intervallkoeffizienten)**

$$
\begin{gathered}
\left[a_{11}^-, a_{11}^+\right]\left[x_1^-, x_1^+\right] + \left[a_{12}^-, a_{12}^+\right]\left[x_2^-, x_2^+\right] + \ldots + \left[a_{1n}^-, a_{1n}^+\right]\left[x_n^-, x_n^+\right] + \left[y_1^-, y_1^+\right] = \left[x_1^-, x_1^+\right] \\
\left[a_{21}^-, a_{21}^+\right]\left[x_1^-, x_1^+\right] + \left[a_{22}^-, a_{22}^+\right]\left[x_2^-, x_2^+\right] + \ldots + \left[a_{2n}^-, a_{2n}^+\right]\left[x_n^-, x_n^+\right] + \left[y_2^-, y_2^+\right] = \left[x_2^-, x_2^+\right] \\
\ldots \\
\ldots \\
\ldots \\
\left[a_{n1}^-, a_{n1}^+\right]\left[x_1^-, x_1^+\right] + \left[a_{n2}^-, a_{n2}^+\right]\left[x_2^-, x_2^+\right] + \ldots + \left[a_{nn}^-, a_{nn}^+\right]\left[x_n^-, x_n^+\right] + \left[y_n^-, y_n^+\right] = \left[x_n^-, x_n^+\right]
\end{gathered}
$$

B. 8. 1.
Das obige System lautet in Matrizenschreibweise:

$$Ax + y = x.$$

mit

$$
A = \begin{pmatrix} \left[a_{11}^-, a_{11}^+\right] & \left[a_{12}^-, a_{12}^+\right] & \ldots & \left[a_{1n}^-, a_{1n}^+\right] \\ \left[a_{21}^-, a_{21}^+\right] & \left[a_{22}^-, a_{22}^+\right] & \ldots & \left[a_{2n}^-, a_{2n}^+\right] \\ & \ldots & & \\ \left[a_{n1}^-, a_{n1}^+\right] & \left[a_{n2}^-, a_{n2}^+\right] & \ldots & \left[a_{nn}^-, a_{nn}^+\right] \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \left[y_1^-, y_1^+\right] \\ \left[y_2^-, y_2^+\right] \\ \ldots \\ \left[y_n^-, y_n^+\right] \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \left[x_1^-, x_1^+\right] \\ \left[x_2^-, x_2^+\right] \\ \ldots \\ \left[x_n^-, x_n^+\right] \end{pmatrix}.
$$

B. 8. 1. ***(Zerlegungsmethode)***
Nach dieser Methode wird das lineare Gleichungssystem in zwei Subsysteme zerlegt. Danach werden die Lösungen der beiden Subsysteme miteinander kombiniert.

System 1

$$
\begin{gathered}
a_{11}^- x_1^- + a_{12}^- x_2^- + \ldots + a_{1j}^- x_j^- + \ldots + a_{1n}^- x_n^- = y_1 \\
\ldots \\
a_{i1}^- x_1^- + a_{i2}^- x_2^- + \ldots + a_{ij}^- x_j^- + \ldots + a_{in}^- x^- = y_i \\
\ldots \\
a_{n1}^- x_1^- + a_{n2}^- x_2^- + \ldots + a_{nj}^- x_j^- + \ldots + a_{nn}^- x_n^- = y_n
\end{gathered}
$$

System 2

$$
\begin{gathered}
a_{11}^+ x_1^+ + a_{12}^+ x_2^+ + \ldots + a_{1j}^+ x_j^+ + \ldots + a_{1n}^+ x_n^+ = y_1 \\
\ldots \\
a_{11}^- x_1^+ + a_{12}^- x_2^+ + \ldots + a_{1j}^- x_j^+ + \ldots + a_{1n}^- x_n^+ = y_1 \\
\ldots \\
a_{n1}^- x_n^+ + a_{n2}^- x_2^+ + \ldots + a_{nj}^- x_j^+ + \ldots + a_{nn}^- x_n^+ = y_n
\end{gathered}
$$

BS. 8. 1.

Sei

$$A=\begin{pmatrix}[0.2000,0.2010] & [0.2000,0.2015] & [0.0882,0.0900]\\ [0.1000,0.1100] & [0.2700,0.2800] & [0.2824,0.2900]\\ [0.0450,0.0500] & [0.1333,0.1400] & [0.5294,0.6000]\end{pmatrix},\qquad y=\begin{pmatrix}350\\500\\550\end{pmatrix}$$

Das obige System kann nun als zwei Subsysteme geschrieben werden:

$$A^{-}=\begin{pmatrix}0.2000 & 0.2000 & 0.0882\\ 0.1000 & 0.2700 & 0.2824\\ 0.0450 & 0.1333 & 0.5294\end{pmatrix},\qquad A^{+}=\begin{pmatrix}0.2010 & 0.2015 & 0.0900\\ 0.1100 & 0.2800 & 0.2900\\ 0.0500 & 0.1400 & 0.6000\end{pmatrix}$$

$$E-A^{-}=\begin{pmatrix}0.8000 & -0.2000 & -0.0882\\ -0.1000 & 0.7300 & -0.2824\\ -0.0450 & -0.1333 & 0.4706\end{pmatrix},\quad E-A^{+}=\begin{pmatrix}0.7990 & -0.2015 & -0.0900\\ -0.1100 & 0.7200 & -0.2900\\ -0.0500 & -0.1400 & 0.4000\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0.8000 & -0.2000 & -0.0882\\ -0.1000 & 0.7300 & -0.2824\\ -0.0450 & -0.1333 & 0.4706\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1^-\\x_2^-\\x_3^-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}350\\500\\550\end{pmatrix},\ x^{-}=\begin{pmatrix}990.3326 & 1470.4770 & 1679.9395\end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix}0.7990 & -0.2015 & -0.0900\\ -0.1100 & 0.7200 & -0.2900\\ -0.0500 & -0.1400 & 0.4000\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1^+\\x_2^+\\x_3^+\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}350\\500\\550\end{pmatrix},\ x^{+}=\begin{pmatrix}1108.7417 & 1715.2845 & 2113.9423\end{pmatrix}^T$$

Die Lösung der obigen Subsysteme ergibt:

$$\begin{pmatrix}[x_1^-,x_1^+]\\ [x_2^-,x_2^+]\\ [x_3^-,x_3^+]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[990.3326,\ 1108.7417]\\ [1470.4770,1715.2845]\\ [1679.9395,2113.9423]\end{pmatrix}$$

__B. 8. 2.__ **(*Berechnung mit Intervallmittelwerten)***
Bei dieser Methode ersetzt man die einzelnen Intervalle durch ihre Mitte:

$$x_i^m := \frac{x_i^- + x_i^+}{2}$$

__BS. 8. 1.__ **(*Fortsetzung*)**

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}0.2005 & 0.2008 & 0.0891\\ 0.1050 & 0.2750 & 0.2862\\ 0.0475 & 0.1367 & 0.5647\end{pmatrix},\quad E-\bar{A}=\begin{pmatrix}0.7995 & -0.2008 & -0.0891\\ -0.1050 & 0.7250 & -0.2862\\ -0.0475 & -0.1367 & 0.4353\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.7995 & -0.2008 & -0.0891 \\ -0.1050 & 0.7250 & -0.2862 \\ -0.0475 & -0.1367 & 0.4353 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350 \\ 500 \\ 550 \end{pmatrix},$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1043.5233 & 1580.4377 & 1873.6807 \end{pmatrix}^T$$

<u>B. 8. 3.</u> ***(Nach dem Jacobi-Verfahren)***

Mit

$$D := \begin{pmatrix} [a_{11}^- a_{11}^+] & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & [a_{22}^-, a_{22}^+] & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & & . & . \; 0 & [a_{nn}^-, a_{nn}^+] \end{pmatrix},$$

$$U := \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ [a_{21}^-, a_{21}^+] & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ [a_{n1}^-, a_{n1}^+] & . & . & . & [a_{n,n-1}^-, a_{n,n-1}^+] & 0 \end{pmatrix},$$

$$O := \begin{pmatrix} 0 & [a_{12}^-, a_{12}^+] & . & . & . & [a_{1n}^-, a_{1n}^+] \\ 0 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & [a_{n-1,n}^-, a_{n-1,n}^+] \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

lässt sich nun das Gleichungssystem $A_I \cdot x_I = b_I$ folgendermaßen schreiben:

$$(D - U - O)x = y \quad \Rightarrow \quad Dx = (U + O_I)x + y.$$

Vorausgesetzt, dass D^{-1} existiert, erhält man:

$$x = D^{-1}\{(U + O)x + y\}$$

$$= D^{-1}\left(U+O\right)x + D^{-1}y\,.$$

Die Iterationsvorschrift nach dem Jacobi-Algorithmus lautet nun:

$$x^{(k)} = D^{-1}\left(U+O\right)x^{(k-1)} + D^{-1}y, \quad k = 1, 2, \ldots$$

BS. 8. 1. (*Fortsetzung*)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} [0.2000, 0.2010] & [0.2000, 0.2015] & [0.0882, 0.0900] \\ [0.1000, 0.1100] & [0.2700, 0.2800] & [0.2824, 0.2900] \\ [0.0450, 0.0500] & [0.1333, 0.1400] & [0.5294, 0.6000] \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 350 \\ 500 \\ 550 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} [0.2000, 0.2010] & [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] \\ [0.0000, 0.0000] & [0.2700, 0.2800] & [0.0000, 0.0000] \\ [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] & [0.5200, 0.6000] \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] \\ [0.1000, 0.1100] & [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] \\ [0.0450, 0.0500] & [0.1333, 0.1400] & [0.0000, 0.0000] \end{pmatrix}$$

$$O = \begin{pmatrix} [0.0000, 00000] & [0.2000, 0.2015] & [0.0882, 0.0900] \\ [0.0000, 00000] & [0.0000, 00000] & [0.2824, 0.2900] \\ [0.0000, 00000] & [0.0000, 00000] & [0.0000, 00000] \end{pmatrix}$$

$$\det D = (-1)^{1+1} \cdot [0.2000, 0.2010] \cdot \det \begin{pmatrix} [0.2700, 0.2800] & [0.0000, \ 0000] \\ [0.0000, 0.0000] & [0.5200, 0.6000] \end{pmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2} \cdot [0.0000, 0.0000] \cdot \det \begin{pmatrix} [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] \\ [0.0000, 0.0000] & [0.5200, 0.6000] \end{pmatrix}$$

$$+(-1)^{1+3} \cdot [0.0000, 0.0000] \cdot \det \begin{pmatrix} [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] \\ [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] \end{pmatrix}$$

$$\det D = [0.2000, 0.2010] \cdot \det \begin{pmatrix} [0.2700, 0.2800] & [0.0000, \ 0000] \\ [0.0000, 0.0000] & [0.5200, 0.6000] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0.1404] \\ [0.1680] \end{pmatrix}.$$

$$\det D = [0.2000, 0.2010] \cdot [0.1404, 0.1680] = [0.0281, 0.0338]$$

$$D_{11} = [0.1404, 0.1680], \ D_{12} = [0.0000, 0.0000], \ D_{13} = [0.0000, 0.0000]$$

$$D_{21} = [0.0000, 0.0000], D_{22} = [0.1040, 0.1206], \ D_{23} = [0.0000, 0.0000]$$

$D_{31}=\left[0.0000,0.0000\right],\ D_{32}=\left[0.0000,0.0000\right],\quad D_{33}=\left[0.0540,0.0563\right]$

$$D^{-1}=\frac{1}{\left[0.0281,0.0338\right]}\begin{pmatrix}\left[0.1404,0.1680\right] & \left[0.0000,0.0000\right] & \left[0.0000,0.0000\right]\\ \left[0.0000,0.0000\right] & \left[0.1040,0.1206\right] & \left[0.0000,0.0000\right]\\ \left[0.0000,0.0000\right] & \left[0.0000,0.0000\right] & \left[0.0540,0.0563\right]\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\left[4.1538,5.9786\right] & \left[0.0000,0.0000\right] & \left[0.0000,0.0000\right]\\ \left[0.0000,0.0000\right] & \left[3.0769,4.2918\right] & \left[0.0000,0.0000\right]\\ \left[0.0000,0.0000\right] & \left[0.0000,0.0000\right] & \left[1.5976,2.0036\right]\end{pmatrix}$$

$$\left(U+O\right)=\begin{pmatrix}\left[0.0000,0.0000\right] & \left[0.0000,0.0000\right] & \left[0.0000,0.0000\right]\\ \left[0.1000,0.1100\right] & \left[0.0000,0.0000\right] & \left[0.0000,0.0000\right]\\ \left[0.0450,0.0500\right] & \left[0.1333,0.1400\right] & \left[0.0000,0.0000\right]\end{pmatrix}+$$

$$\begin{pmatrix}\left[0.0000,00000\right] & \left[0.2000,0.2015\right] & \left[0.0882,0.0900\right]\\ \left[0.0000,00000\right] & \left[0.0000,00000\right] & \left[0.2824,0.2900\right]\\ \left[0.0000,00000\right] & \left[0.0000,00000\right] & \left[0.0000,00000\right]\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\left[0.0000,0.0000\right] & \left[0.2000,0.2015\right] & \left[0.0882,0.0900\right]\\ \left[0.1000,0.1100\right] & \left[0.0000,0.0000\right] & \left[0.2824,0.2900\right]\\ \left[0.0450,0.0500\right] & \left[0.1333,0.1400\right] & \left[0.0000,0.0000\right]\end{pmatrix}$$

$$D^{-1}\left(U+O\right)=\begin{pmatrix}\left[0.0000,0.0000\right] & \left[0.8308,1.2047\right] & \left[0.3664,0.5381\right]\\ \left[0.3077,0.4721\right] & \left[0.0000,0.0000\right] & \left[0.8689,1.2446\right]\\ \left[0.0719,0.1002\right] & \left[0.2130,0.2805\right] & \left[0.0000,0.0000\right]\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\left[x_1^-,x_1^+\right]^{(k)}\\ \left[x_2^-,x_2^+\right]^{(k)}\\ \left[x_3^-,x_3^+\right]^{(k)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left[0.0000,0.0000\right] & \left[0.8308,1.2047\right] & \left[0.3664,0.5381\right]\\ \left[0.3077,0.4721\right] & \left[0.0000,0.0000\right] & \left[0.8689,1.2446\right]\\ \left[0.0719,0.1002\right] & \left[0.2130,0.2805\right] & \left[0.0000,0.0000\right]\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\left[x_1^-,x_1^+\right]^{(k-1)}\\ \left[x_2^-,x_2^+\right]^{(k-1)}\\ \left[x_3^-,x_3^+\right]^{(k-1)}\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}\left[4.1538,5.9786\right] & \left[0.0000,0.0000\right] & \left[0.0000,0.0000\right]\\ \left[0.0000,0.0000\right] & \left[3.0769,4.2918\right] & \left[0.0000,0.0000\right]\\ \left[0.0000,0.0000\right] & \left[0.0000,0.0000\right] & \left[1.5976,2.0036\right]\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}350\\ 500\\ 550\end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} [0.2000, 0.2010] & [0.2000, 0.2015] & [0.0882, 0.0900] \\ [0.1000, 0.1100] & [0.2700, 0.2800] & [0.2824, 0.2900] \\ [0.0450, 0.0500] & [0.1333, 0.1400] & [0.5294, 0.6000] \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 350 \\ 500 \\ 550 \end{pmatrix}$$

$$E - A = \begin{pmatrix} [1,0000, 1.0000] & [0.0000.0.0000] & [0.0000.0.0000] \\ [0.0000.0.0000] & [1,0000, 1.0000] & [0.0000.0.0000] \\ [0.0000.0.0000] & [0.0000.0.0000] & [1.0000, 1.0000] \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} [0.2000, 0.2010] & [0.2000, 0.2015] & [0.0882, 0.0900] \\ [0.1000, 0.1100] & [0.2700, 0.2800] & [0.2824, 0.2900] \\ [0.0450, 0.0500] & [0.1333, 0.1400] & [0.5294, 0.6000] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [\ 0.7990, \quad 0.8000] & [-0.2015, \quad -0.2000] & [-0.0900, \quad -0.0882] \\ [-0.1100, \quad -0.1000] & [\ 0.7200, \quad 0.7300] & [-0.2900, \quad -0.2824] \\ [-0.5000, \quad -0.0450] & [-0.1400, \quad -0.1333] & [\ 0.4000, \quad 0.4706] \end{pmatrix}$$

Sei

$$\begin{pmatrix} [x_1^-, x_1^+]^{(0)} \\ [x_2^-, x_2^+]^{(0)} \\ [x_3^-, x_3^+]^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [990.3326,\ 1108.7417] \\ [1470.4770, 1715.2845] \\ [1679.9395, 2113.9423] \end{pmatrix}$$

$$[x_1^-, x_1^+]^{(k+1)} = \frac{[y_1^-, y_1^+] - [a_{12}^-, a_{12}^+][x_2^-, x_2^+]^{(k)} - [a_{13}^-, a_{13}^+][x_3^-, x_3^+]^{(k)} - \ldots - [a_{1n}^-, a_{1n}^+][x_n^-, x_n^+]^{(k)}}{[a_{11}^-, a_{11}^+]}$$

$$[x_2^-, x_2^+]^{(k+1)} = \frac{[y_2^-, y_2^+] - [a_{21}^-, a_{21}^+][x_1^-, x_1^+]^{(k)} - [a_{23}^-, a_{23}^+][x_3^-, x_3^+]^{(k)} - \ldots - [a_{2n}^-, a_{2n}^+][x_n^-, x_n^+]^{(k)}}{[a_{22}^-, a_{22}^+]}$$

...

...

$$[x_n^-, x_n^+]^{(k+1)} = \frac{[y_n^-, y_n^+] - [a_{n1}^-, a_{n1}^+][x_1^-, x_1^+]^{(k)} - [a_{n2}^-, a_{n2}^+][x_2^-, x_2^+]^{(k)} - \ldots - [a_{n(n-1)}^-, a_{n(n-1)}^+][x_{n-1}^-, x_{n-1}^+]^{(k)}}{[a_{nn}^-, a_{nn}^+]}$$

Die Durchführung der Iterationsschritte manuell aufwendig. Daher müssen wir hier leider darauf verzichten.

Literatur

/1/ Abolmasoumi, Shohreh; Alavi, Majid (2014), “A Method for Calculating Interval Linear Systems,” Journal of Mathematics and Computer Science 8.

/2/ Alefeld, Götz; Herzberger, Jürgen (1983), “Introduction to Interval Computations,” Academic Press, New York.

/3/ Bachem, Achim; Korte, Bernhard (1981), “Mathematical Programming and Estimation of Input-Output Matrices,” Institut für Ökonometrie und Operations Research, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität.

/4/ Chander, Parkash (1983), “The Nonlinear Input-Output Model,” Journal of Economic Theory, Vol. 30, No. 2, pp. 219 – 229.

/5/ Duchin, Faye; Steenge, Albert E. (2007), “Mathematical Models in Input-Output Economics,” Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS).

/6/ Fleissner, Peter; Böhme, Wolfgang; Brautzsch, Hans-Ulrich; Höhne, Jörg; Siassi, Jilla; Stark, Karl (1993), “Input-Output-Analyse,“ Eine Einführung in Theorie und Anwendungen, Springer-Verlag Wien-New York.

/7/ Fujimoto, Takao; Herrero, Carmen; Villar, Antonio (1985), “A Sensitivity Analysis in a Non-linear Leontief Model,” Zeitschrift für Nationalökonomie, Vol. 45, No. 1, pp. 67-71.

/8/ Iritani, Jun (1989), “On the Assumptions of the Non-Linear Leontief Models,” In: KSZ Economics and Business Review, No. 16, pp. 13-22.

/9/ Iritani, Jun (1990), “On a Non-Linear Leontief System,” The Economic Systems Quarterly, Vol. 41, No. 2.

/10/ Kaper, Bob (1979), “Nonlinear Input-Output Models and Comparative Statics”, Tilburg University.

/11/ Koopmans, Tjalling C. (1951), “Alternative Proof of the Substitution Theorem for Leontief Models in the General Case,” New Haven: Yale University Press.

/12/ Koparanova, Malinka; Koparanov, S.M. (1993), “Interval Input-Output Model,” In: IFAC Proceedings Volumes, Volume 26, Issue 2, Part 5, Pages 647-650.

/13/ Krause, Ulrich (1992), “Path Stability of Prices in a Nonlinear Leontief Model,” Annals of Operations Research 37(141-148).

/14/ Lahiri, Sajal (1976), “Input-Output Analysis with Scale-dependent Coefficients,” Econometrica, Vol. 44, No. 5, pp. 947-961.

/15/ Leontief, Wassily (1949), “The Structure of American Economy, 1919 – 1939,” London: Oxford University Press.

/16/ Leontief, Wassily et al. (1953), “Studies in the Structure of the American Economy,” New York: Oxford University Press.

/17/ Mangasarian, Olvi L. (1969), “Nonlinear Programming,” New York: McGraw Hill.

/18/ Michaelides, Panayotis G.; Belegri-Roboli, Athna; Markaki, Maria (2012), "A Non-Linear Leontief-Type Input-Output Model," National Technical University of Athens.

/19/ Nikaido, Hukukane (1968), "Convex Structures and Economic Theory," New York-London.

/20/ Ortega, James M.; Rheinboldt, Werner C. (1970), "Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables," New York-London.

/21/ Pearson, Ronald K. (1995), "Nonlinear Input/Output Modelling," Journal of Process Control, Vol. 5, Iss: 4, pp 197-211.

22/ Rocco Claudio, Guarata, N. (2002), "The Use of Interval Arithmetic as an Alternative Method to Evaluate Uncertainty in Input-Output Models," Universidad Central Venezuela, Facultad de Ingeniería, Caracas.

/23/ Rohn, Jiri (1980), "Input-Output Model with Interval Data," Econometrica*,* Vol. 18, No. 3, pp. 767-769.

/24/ Samuelson, Paul A. (1951), "Abstract of a Theorem Concerning Substitutability in Open Leontief Models," in T. C. Koopmans, ed., Activity Analysis of Production and Allocation*,* New Haven: Yale University Press, pp. 142 – 146.

/25/ Sandberg, I.W (1973), "A Nonlinear Input-Output Model of a Multi-sectored Economy," Econometrica, Vol.41, No. 6, pp. 1167-1182.

/26/ Shary, Sergey (1957), "D and Control Problems, Reliable Computing, 3(2), 3 -33.

/27/ Siassi, Jilla (1981), "Eigenschaften und Probleme der Anwendung statischer volkswirtschaft-licher Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Material- und Primärressourcenaufwands-funktionen. Dissertation B, Berlin.

/28/ Siassi, Jilla (1988), "Ein kurzer Überblick über die Theorie der statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen," In: Forschungsinfor-mation der Sektion Wirtschaftsinformatik der HfÖ, Heft 7.

/29/ Siassi, Jilla; Ivaničová; Stark, Karl (1990), "Input-Output-Modelle und Produktionsfunktionen," In: Forschungsinformation der Sektion Wirtschaftsinformatik der HfÖ, Heft 7.

/30/ Solow, Robert (1952), "On the Structure of Linear Models," Econometrica 20, S. 27-46.

/31/ Stecenko, V. Ja.; Tumanov, L. A.; Šutov, V. G. (1977), "K teorii nelinejnich modelej mežotraslevovoj balansa," In: Modeli I metody analiza ekonomičeskych celenapravlennych systemy, Novosibirsk, S. 166- 176.

/32/ Woodbury, Max A. (1954), "Properties of Leontief-Type Input-Output Matrices," In: Morgenstern, O. (Hrsg.): Economic Activity Analysis, New York-London, S. 341-363.