Analysis in der Ökonomie
(Teil 2)
Lösungen

1.

$$\frac{\partial y}{\partial A} = 0.8A^{-0.6}K^{0.6}, \qquad \frac{\partial y}{\partial K} = 1.2A^{0.4}K^{-0.4}$$

2.

i) $\frac{\partial y}{\partial A}(1000; 200) = 52.1841;$ $\qquad \frac{\partial y}{\partial K}(1000; 200) = 65.2302$

Bei einer Ausgangssituation von 1000 Arbeitseinheiten und 200 GE erhöht sich der Ertrag Etwa um 52.1841 Einheiten, wenn c.p eine Arbeitseinheit mehr, bzw. um 65.2302 Einheiten, wenn c.p. eine GE mehr eingesetzt wird.

ii) $K = 8A$, $\qquad \frac{\partial y}{\partial A} = 109.1316;$ $\qquad \frac{\partial y}{\partial K} = 3.4104$

Unter den gegebenen Voraussetzungen wird der Ertrag etwa um 109.1316 Einheiten erhöht bei einer Erhöhung von A um eine Einheit, um 3.4104 Einheiten bei Erhöhung von K um eine GE (bei Konstanz der jeweils anderen Einflußgröße).

3.

$$\frac{\partial y}{\partial A} = 0.8A^{-0.2}K^{0.2} > 0; \qquad \frac{\partial y}{\partial K} = 0.2A^{0.8}K^{-0.8} > 0,$$

d.h. der Output ist sowohl bzgl. der Arbeit als auch bzgl. des Kapitals zunehmend.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial A^2} = -0.16A^{-1.2}K^{0.2} < 0; \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial K^2} = -0.16A^{0.8}K^{-1.8} < 0;$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial A \partial K} = \frac{\partial^2 y}{\partial K \partial A} = 0.16A^{-0.2}K^{-0.8} > 0.$$

d.h. die Grenzproduktivität der Arbeit (bzw. des Kapitals) nimmt mit steigendem Arbeitsinput (bzw. Kapitalinput) c.p. ab. Die entsprechenden partiellen Ertragsfunktionen $y = y(A, K_0)$ (bzw. $y = y(A_0, K)$) sind konkav; sie genügen dem Gesetz abnehmender Ertragszuwächse.

4.

1.

$$P(40,\ 60) = 2352.16$$

2.

$$P_A(A,K) = 30A^{-0.4} \cdot K^{0.4}, \qquad P_A(40,60) = 35.28\,.$$

Erhöht man, ausgehend von $A = 40,\ K = 60$, *nur* A um eine Einheit, so erhöht sich die Produktion um etwa 35.28 Einheiten.

3.

$$\varepsilon_{P,A}(A,K) = \frac{A}{50A^{0.6} \cdot K^{0.4}} \cdot 30A^{-0.4} \cdot K^{0.4} = 0.6\,.$$

Erhöht man, ausgehend von $A = 40,\ K = 60$, *nur* A um ein Prozent, so erhöht sich die Produktion um etwa 0.6 Prozent.

5.

1.

$$P(100,\ 90) = 3715.61$$

2.

$$P_A(A,K) = 28A^{0.3} \cdot K^{-0.3}, \qquad P_A(100,90) = 28.90\,.$$

Erhöht man, ausgehend von $A = 100,\ K = 90$, *nur* K um eine Einheit, so erhöht sich die Produktion um etwa 28.90 Einheiten.

3.

$$\varepsilon_{P,A}(A,K) = \frac{A}{40A^{0.3} \cdot K^{0.7}} \cdot 28A^{0.3} \cdot K^{-0.3} = 0.7\,.$$

Erhöht man, ausgehend von $A = 100,\ K = 90$, *nur* K um ein Prozent, so erhöht sich die Produktion um etwa 0.7 Prozent.

6.

a)

$$y_A(2,5) = 12 > 0\,, \qquad y_K(2,5) = -147 < 0\,,$$

$$y_{AA}(2,5) = -62 < 0\,, \qquad y_{KK}(2,5) = -72 < 0\,,$$

$$y_{AK}(2,5) = y_{KA}(2,5 = 8 > 0\,.$$

In der Umgebung der Inputkombination (2, 5) verläuft die Produktionsfunktion monoton steigend bzgl. A, monoton fallend bzgl. K. Die Krümmung bzgl. beider Parameter ist konkav, d.h. die Grenzproduktivitäten der Arbeit und des Kapitals nehmen ab. Die Grenzproduktivität nimmt mit steigendem Kapitaleinsatz zu und umgekehrt.

b)

$y_A(10,2) = -922 < 0$, $\qquad y_K(10,2) = -236 < 0$,

$y_{AA}(10,2) = -188 < 0$, $\qquad y_{KK}(10,2) = 14 > 0$.

$y_{KA}(10,2) = -52 < 0$

In der Nähe der Inputkombination (10, 2) verläuft die Ertragsfunktion monoton fallend bzgl. der Arbeit oder des Kapitals; bzgl. Arbeit ist die Krümmung konkav, bzgl. des Kapitals konvex, d.h. die Grenzproduktivität der Arbeit nimmt ab, die des Kapitals zu. Die Grenzproduktivität der Arbeit bzgl. des Kapitals und umgekehrt nehmen ab.

7.

1.

i) $dy_A = \dfrac{\partial y}{\partial A} dA = 0.4 A^{-0.8} K^{0.8} dA$; $\qquad dy_A(20,10) \approx 9.2297 dA$

$dy_K = \dfrac{\partial y}{\partial K} dK = 1.6 A^{0.2} K^{-0.2} dK$; $\qquad dy_K(20,10) \approx 1.8379 dK$

ii) $dy = \dfrac{\partial y}{\partial A} dA + \dfrac{\partial y}{\partial K} dK$; $\qquad dy\ (20,10) = 0.2297 dA + 1.8379 dK$

2.

a) $dy(A = 20, K = 10, dA = -0.3, dK = 0.1) = 0.115$

b) $\Delta y = y(19.7, 10.1) - y(20,10) = 0.114$

8.

1.

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = -0.5 \frac{\mathrm{ME}_1}{\mathrm{GE/ME}_1}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial p_2} = 2 \frac{\mathrm{ME}_1}{\mathrm{GE/ME}_2},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 0.8 \frac{\mathrm{ME}_2}{\mathrm{GE/ME}_1}, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial p_2} = -1.5 \frac{\mathrm{ME}_2}{\mathrm{GE/ME}_2}.$$

D.h. z.B.: Wenn der Preis p_2 des zweiten Gutes – c.p. – um eine $\mathrm{GE/ME}_2$ steigt, so erhöht sich die Nachfrage x_1 nach dem ersten Gut um 2 ME_1 usw.

2.

Aus (i) folgt: Da die Nachfrage nach einem Gut mit zunehmendem Preis des gleichen Gutes c.p. abnimmt, aber mit zunehmendem Preis des anderen Gutes c.p. zunimmt, handelt es sich um substitutive Güter.

3.

Aus dem vorgegebenen linearen Gleichungssystem erhält man:

$$p_1(x_1,x_2)=\frac{13}{17}x_1+\frac{40}{17}x_2-\frac{900}{17}$$
$$p_2(x_1,x_2)=\frac{16}{17}x_1+\frac{10}{17}x_2-\frac{310}{17}$$

d.h.

$$E_1(x_1,x_2)=x_1 p_1(x_1,x_2)=x_1(\frac{13}{17}x_1+\frac{40}{17}x_2-\frac{900}{17})$$
$$E_2(x_1,x_2)=x_2 p_2(x_1,x_2)=x_2(\frac{16}{17}x_1+\frac{10}{17}x_2-\frac{310}{17})$$

$$x_1=16\,\mathrm{ME}_1,\quad x_1=13.9\,\mathrm{ME}_2,$$

so dass schließlich für die Grenzerlöse bzgl. der Mengen gilt:

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_1}(8,5)=33.24\,\mathrm{GE/ME}_1 \qquad \frac{\partial E_1}{\partial x_2}(8,5)=37.65\,\mathrm{GE/ME}_2 \quad ,$$

d.h. erhöht man – ausgehend vom Preisniveau $p_1=8,\quad p_2=5$ - c.p. die Menge um $1\,\mathrm{ME}_1$ (bzw.$1\,\mathrm{ME}_2$), so steigt der Erlös des ersten Produktes um 36.24 GE (bzw. 37.65 GE).

$$\frac{\partial E_2}{\partial x_1}(8,5)=13.084\,\mathrm{GE/ME}_1 \qquad \frac{\partial E_2}{\partial x_2}(8,5)=13.18\,\mathrm{GE/ME}_2 \quad ,$$

d.h. eine Mengenzunahme um$1\,\mathrm{ME}_1$ (bzw.$1\,\mathrm{ME}_2$), bewirkt eine Erlössteigerung des zweiten Produktes um 13.08 GE (bzw. 13.18 GE).

9.

1. $\varepsilon_{x_1,p_2}=\dfrac{0.3p_2}{100-0.8p_1+0.3p_2}>0$; $\qquad \varepsilon_{x_2,p_1}=\dfrac{0.5p_1}{150+0.5p_1-0.6p_2}>0$;

   d.h. die Güter sind substitutiv.

2. $\varepsilon_{x_1,p_2}=p_2>0$; $\qquad \varepsilon_{x_2,p_1}=p_1>0$;

   d.h. die Güter sind substitutiv.

3. $\varepsilon_{x_1,p_2}=-1<0$; $\qquad \varepsilon_{x_2,p_1}=-p_1<0$;

   d.h. die Güter sind komplementär.

10.

$$dx_{r_1}(r_1=4,\ r_2=5, r_3=9, dr_1=0.2)=(0.25r_1^{-0.5}r_2^{0.5}+0.04r_1^{-0.6}r_3^{0.6})\cdot 0.2=0.0689$$
$$dx_{r_2}(r_1=4,\ r_2=5, r_3=9, dr_2=-0.1)=(0.25r_1^{0.5}r_2^{-0.5}+1.4r_2^{-0.7}r_3^{0.7})\cdot(-0.1)=-0.0314$$
$$dx_{r_3}(r_1=4,\ r_2=5, r_3=9, dr_3=-0.1)=(0.06r_1^{0.4}r_3^{-0.4}+1.4r_2^{0.3}r_3^{-0.3})\cdot(-0.1)=-0.0161$$
$$dy=\sum_{i=1}^{3}dx_{r_i}=0.0689-0.0314-0.0161=0.0214$$

11.

1.
$$\begin{aligned} f(rx_1, rx_2, rx_3) &= \sqrt{(rx_1)^2 + 2(rx_2)^2 + 3(rx_3)^2 - rx_1(rx_2 + rx_3} \\ &= r\sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - x_1(x_2 + x_3)} \\ &= rf(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

Gleichzeitige Erhöhung der Faktorquantitäten auf das $r-$fache bewirkt eine Erhöhung der Produktquantität auf das $r-$fache.

2. $f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{2x_1 - (x_2 + x_3)}{2f(x_1, x_2, x_3)}$; $\qquad f_{x_1}(100,100,100) = 0$

$f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{4x_2 - x_1}{2f(x_1, x_2, x_3)}$; $\qquad f_{x_2}(100,100,100) = 0.75$

$f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{6x_3 - x_1}{2f(x_1, x_2, x_3)}$; $\qquad f_{x_3}(100,100,100) = 1.25$

Ausgehend vom Produktionsniveau $x_1 = x_2 = x_3 = 100$ erhöht man x_1 um 1 Einheit, so erhöht sich die Produktion um etwa 0 Einheiten. Ähnliches gilt für x_2 bzw. x_3.

$$x_1 = x_2 = x_3 = 100$$
$$\frac{\partial x_3}{\partial x_2} = -\frac{f_{x_2}(100,100,100)}{f_{x_3}(100,100,100)} = -0.6$$

für $x_1 = x_2 = x_3 = 100$ ergibt sich das Produktionsniveau 200, das durch geeignete Faktorsubstitution erhalten werden kann. Wird der zweite Faktor um 1 Einheit erhöht, so kann der dritte Faktor um etwa 0.6 Einheiten gesenkt werden.

3. $\rho_{f,x_1}(100,100,100) = \varepsilon_{f,x_1}(100,100,100) = 0$,

$\rho_{f,x_3}(100,100,100) = 0.00625$; $\quad \varepsilon_{f,x_3}(100,100,100) = 100 \cdot 0.00625$

12.

1.

$f(100,100) \approx 242$

$f_{x_1}(x_1, x_2) = \dfrac{10}{2\sqrt{x_1}} \qquad \Rightarrow \qquad f_{x_1}(100,100) = 0.5$

$$f_{x_2}(x_1,x_2)=\frac{20}{x_2+1} \qquad \Rightarrow \qquad f_{x_2}(100,100)\approx 0.2$$

$\rho_{f,x_1}(100,100)\approx 0.002,\qquad \varepsilon_{f,x_1}(100,100)\approx 0.2$

$\rho_{f,x_2}(100,100)\approx 0.0008,\qquad \varepsilon_{f,x_2}(100,100)\approx 0.08$

2.

$$r^T=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}: \qquad \nabla f(100,100)^T r=0.9$$
$$r^T=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}: \qquad \nabla f(100,100)^T r=1.2$$

Die Richtung $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$ bewirkt einen Absatzzuwachs von 0.9, die Richtung $\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}$ einen Absatzzuwachs von 1.2.

Wird das Budget x_1 doppelt so stark erhöht wie das Budget x_2, so ist dies für die Absatzwirkung wegen 1.2 > 0.9 günstiger als eine Erhöhung des Budgets x_2 um das Doppelte von Budget x_1.

3.

$$-1=\frac{f_{x_1}(x_1,x_2)}{f_{x_2}(x_1,x_2)}=\frac{-10(x_2+1)}{2\sqrt{x_1}\cdot 20} \quad \Leftrightarrow \quad 4\sqrt{x_1}=x_2+1$$

Die Absatzzuwächse bei steigendem Budget x_1 bzw. x_2 sind gleich für alle $\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}>0$ mit $x_2=4\sqrt{x_1}-1$. Zum Beispiel $\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}=(1,3),(4,7),(9,11)$. Der Quotient $\frac{x_2}{x_1}$ fällt für steigendes x_1.

4.

$$\tilde{\Delta} f(100,100)=f_{x_1}(100,100)\Delta x_1+f_{x_2}(100,100)\Delta x_2\approx 0.5+0.2=0.7$$

$$\Delta f(100,100)=0.6958$$

13.

1.

$$\begin{aligned}G_1(p_1,p_2)&=p_1x_1-K_1(x_1)\\&=-2p_1^2-p_1p_2+104p_1+2p_2-320\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_2(p_1,p_2)&=p_2x_2-K_2(x_2)\\&=-3p_2^2-p_1p_2+2p_1+126p_2-360\end{aligned}$$

$G(p_1, p_2) = -2p_1^2 - 2p_1p_2 - 3p_2^2 + 106p_1 + 128p_2 - 680$

2.

$G_{p_1}(p_1, p_2) = -4p_1 - 2p_2 + 106 = 0$
$G_{p_2}(p_1, p_2) = -2p_1 - 6p_2 + 128 = 0$

$p_1 = 19, \quad p_2 = 15$

$G_{p_1p_1} = -4, \qquad G_{p_1p_2} = -2, \qquad G_{p_2p_2} = -6$

Wegen $G_{p_1p_1} \cdot G_{p_2p_2} - (G_{p_1p_2})^2 = (-4)\cdot(-6) - (-2)^2 > 0, \quad G_{p_1p_2} = -4 < 0$ ist der Gewinn für $p_1 = 19, \quad p_2 = 15$ maximal; er beträgt $G(19,15) = 1287$ GE.

3.

$G_1(p_1, 16) = -2p_1^2 + 88p_1 - 288 := \tilde{G}(p_1)$

$\tilde{G}_1'(p_1) = -4p \ + 88 = 0 \iff p_1 = 22$

$\tilde{G}_1''(p_1) = -4 < 0$

Damit ist G_1 für $p_1 = 22$ maximal; der maximale Gewinn beträgt 680 GE.

4.

Da der Preis $p_1 = 19$ auf $p_1 = 22$ ansteigt, ist es für die Käufer vorteilhaft, wenn der Konflikt beigelegt wird.

14.

1.
Es gilt

$$n = 10, \quad \sum_{t=1}^{10} t = 55, \quad \sum_{t=1}^{10} t^2 = 385, \quad \sum_{t=1}^{10} y(t) = 140, \quad \sum_{t=1}^{10} t \cdot y(t) = 836$$

Die Lösung des Gleichungssystems

$$10a + 55b = 140$$
$$55a + 358b = 836$$

ergibt:

$$a = 9.6, \qquad b = 0.8$$

Die gesuchte Trendfunktion lautet damit

$$y(t) = 9.6 + 0.8t$$

2.

$$\rho_y(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{0.8}{9.6 + 0.8t}$$ fällt monoton gegen 0

$$\varepsilon_y(t) = \frac{y'(t) \cdot t}{y(t)} = \frac{0.8t}{9.6 + 0.8t}$$ fällt monoton gegen 1

3.

$$y(11) = 18.4, \qquad y(12) = 19.2$$

15.

Der Preis bei der ersten Alternative beträgt:

$$p = 30 \cdot 50000 = 1.5 \text{ Mio. €}$$

Das Modell der zweiten Alternative:

$$p(x_1, x_2) = \frac{3}{2} x_1^2 + x_2^2 + 25x_1 - 30x_2 + 20 \to Min!$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 = 30.$$

Setzt man $x_2 = 30 - x_1$ in die Funktion p ein, so erhält man.

$$p(x_1) = \frac{3}{2} \cdot x_1^2 + (30 - x_1)^2 + 25x_1 - 30 \cdot (30 - x_1) + 20$$
$$= \frac{5}{2} . x_1^2 - 5x_1 + 20 \to Min!$$

$$p'(x_1) = 5x_1 - 5, \qquad 5x_1 - 5 = 0, \qquad x_1 = 1$$

$$p''(x_1) = 5 > 0.$$

$$x_2 = 30 - x_1 = 30 - 1 = 29.$$

$$p(1, 29) = \frac{3}{2} \cdot 1^2 + 29^2 + 25 \cdot 1 - 30 \cdot 29 + 20 = 1.75 \text{ Mio. €}$$

Damit ist die erste Variante für die Firma günstiger.

16.
1.

$$K_L(x_1, x_2) = (4000 - x_1)^2 + (2750 - x_2)^2 \to Min!$$

$$x_1 + 2x_2 = 4500$$

$$L(x_1, x_2, \lambda) = (4000 - x_1)^2 + (2750 - x_2)^2 + \lambda \cdot (x_1 + 2x_2 - 4500) \to Min!$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2 \cdot (4000 - x_1) \cdot (-1) + \lambda = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 4000 - 0.5\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2 \cdot (2750 - x_2) \cdot (-1) + 2\lambda = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 2750 - \lambda$$

$$4000 - 0.5\lambda + 2 \cdot (2750 - \lambda) - 4500 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2000$$

$$x_1 = 3000, \quad x_2 = 750 .$$

(Es lässt sich zeigen, dass auch die notwendigen Bedingungen für diese Lösung erfüllt sind.)

2.

$$K_L(3000{,}750) = 5000000!$$

17.
1.

Es ist zu lösen das Problem

$$Min\{2x_1 + 2x_2 + x_3 \mid x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 2000\}:$$

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + \lambda(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - 2000)$$

$$L_{x_1}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 2 + \lambda x_2 x_3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{-2}{x_2 x_3}$$

$$\tilde{L}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 2x_2 + x_3 - \frac{2}{x_2 x_3}(x_1 x_2 x_3 - 2000)$$

$$= 2x_2 + x_3 + \frac{4000}{x_2 x_3}$$

$$\tilde{L}_{x_2}(x_1, x_2, x_3) = 2 - \frac{4000}{x_2^2 x_3} = 0$$

$$\tilde{L}_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = 1 - \frac{4000}{x_2 x_3^2} = 0$$

$$\Rightarrow\; x_2\, \tilde{L}_{x_2}(x_1, x_2, x_3) - x_3\, \tilde{L}(x_1, x_2, x_3) = 2x_2 - x_3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_3 = 2x_2$$

$$1 - \frac{4000}{x_2 x_3^2} = 1 - \frac{4000}{4x_2^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 10, \quad x_3 = 20$$

$$x_1 x_2 x_3 = 200 x_1 = 2000 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 10$$

$$H(x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{8000}{x_2^3 x_3} & \frac{4000}{x_2^2 x_3^2} \\ \frac{4000}{x_2^2 x_3^2} & \frac{8000}{x_2 x_3^2} \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\det H_1(x_2, x_3) = \frac{8000}{x_2^3 x_3} > 0, \quad \forall x_2, x_3 > 0$$

$$\det H_2(x_2, x_3) = \frac{(64-16)\cdot 10^6}{x_2^4 x_3^4} > 0, \quad \forall x_2, x_3 > 0$$

ist $H(x_2, x_3)$ positiv definit und $(x_1 \quad x_2 \quad x_3) = (10 \quad 10 \quad 20)$ stellt eine kostenminimale Faktorkombination zum Produktionsniveau 2000 dar.

2.

$$\rho_{f,x_1}(10,10,20) = \frac{200}{2000} = \frac{1}{10} = \rho_{f,x_2}(10,10,20)$$

$$\rho_{f,x_3}(10,10,20) = \frac{100}{2000} = \frac{1}{20}$$

$$\varepsilon_{f,x_1}(10,10,20) = 1 = \varepsilon_{f,x_2}(10,10,20) = \varepsilon_{f,x_3}(10,10,20)$$

18.
1.

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2, x_3) &= x_1 f_1(x_1) + x_2 f_2(x_2) + x_3 f_3(x_3) \\ &= 100x_1 - x_1^2 + 200x_2 - x_2^2 + 300x_3 - x_3^2 \end{aligned}$$

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 100x_1 - x_1^2 + 200x_2 - x_2^2 + 300x_3 - x_3^2 + \lambda(x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 70)$$

$$L_{x_1}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 100 - 2x_1 + \lambda = 0$$

$$L_{x_2}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 200 - 2x_2 + 2\lambda = 0$$

$$L_{x_3}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 300 - 2x_3 + 3\lambda = 0$$

$$2L_{x_1}(x_1, x_2, x_3, \lambda) - L_{x_2}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = -4x_1 + 2x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 2x_1$$

$$3L_{x_1}(x_1, x_2, x_3, \lambda) - L_{x_2}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = -6x_1 + 2x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = 3x_1$$

$$L_{\lambda}(x_1, x_2, x_3, \lambda)) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 70 = 14x_1 - 70 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 5$$

$\Rightarrow \quad (x_1, x_2, x_3) = (5, 10, 15), \quad \lambda = -100 + 2x_1 = -90$

$$H(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \det H_1(x_1, x_2, x_3, \lambda) &= -2 \\ \det H_2(x_1, x_2, x_3, \lambda) &= 4 \\ \det H_3(x_1, x_2, x_3, \lambda) &= -8 \end{aligned}$$

ist $H(x_1, x_2, x_3, \lambda)$ negativ definit und $(x_1 \quad x_2 \quad x_3) = (5 \quad 10 \quad 15)$ maximiert den Umsatz mit $U(5{,}10{,}15) = 6650$.

2.
Der Wert $-\lambda = 90$ gibt die näherungsweise Umsatzsteigerung für den Fall an, daß die Kapazität 70 um 1 Einheit erhöht wird.

3.
Mit $x_3 = x_2$ und $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 70$ folgt:

$x_1 + 5x_2 = 70$ oder $x_1 = 70 - 5x_2$

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2, x_3) &= 100(70 - 5x_2) - (70 - 5x_2)^2 + 200x_2 - x_2^2 \\ &= 2100 + 700x_2 - 27x_2^2 \end{aligned}$$

$U'(x_2) = 700 - 54x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 \approx 13 = x_3, \quad x_1 = 5$

$U''(x_2) = -54 < 0$

$U(5, 13, 13) = 6637$.

(Letzte Aktualisierung: 22.012.06)