Teil II

Analysis in der Ökonomie

<u>D. 2. 1</u> (*Funktionen von* n *unabhängigen Variablen*)
Sei $n \in N$ und $D(f) \subseteq R^n$. Ist jedem Vektor (Punkt) $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D(f)$ durch eine Vorschrift f eine reelle Zahl $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ zugeordnet, so heißt f *eine Funktion von* n *unabhängigen Variablen* $x_1, x_2, ..., x_n$ auf dem Definitionsbereich $D(f)$. Dabei heißt z *die abhängige Variable*.

Man schreibt

$$f: \quad D(f) \to R^1, \quad D(f) \subseteq R^n$$

oder

$$z = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad (x_1, x_2, ..., x_n) \in D(f), \quad D(f) \subseteq R^n, \quad z \in R^1.$$

<u>BS. 2. 1</u> (*Einige Beispiele*)
1. Eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion:

$$y(A, K) = 2 \cdot A^{0.4} \cdot K^{0.6}.$$

Hier sind:

A: Arbeitsinput,
K: Kapitalinput,
y: Output.

2. Eine Kostenfunktion:

$$K(r_1, r_2) = r_1 + 4r_2 + r_1 \cdot r_2.$$

Hier sind:

K: Faktorkosten,
r_1, r_2: Rohstoffmengen.

3. Eine Nutzenfunktion

$$N(x_1, x_2) = 128x_1 - 10x_2^2.$$

Hier sind:

N: Nutzen,
x_1, x_2: konsumierte Nahrungsmittelmengen.

B. 2. 1.
Die graphische Darstellung einer Funktion mehrerer Variablen ist nur im Fall $n = 2$ möglich. Bei $n > 2$ sind alle Untersuchungen auf die analytische Darstellung $z = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ oder auf eine tabellarische Erfassung angewiesen.

D. 2. 2. (*Graph einer Funktion*)
Bei einer Funktion

$$f: \quad D(f) \to R^1, \quad D(f) \in R^2$$

zweier Variablen x und y heißt die Punktmenge

$$\left\{(x, y, z) \in R^1 \mid z = f(x, y),\ (x, y) \in D(f)\right\}$$

der *Graph* von f .

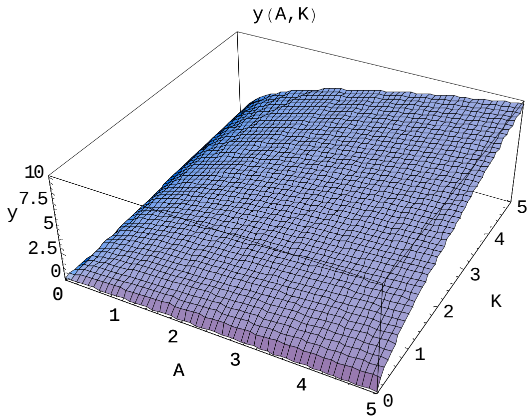
B. 2. 2.
Eine weitere Möglichkeit, eine Funktion $f(x, y)$ zweier Variablen graphisch zu veranschaulichen, ist die Darstellung mittels *Isohöhenlinien*.

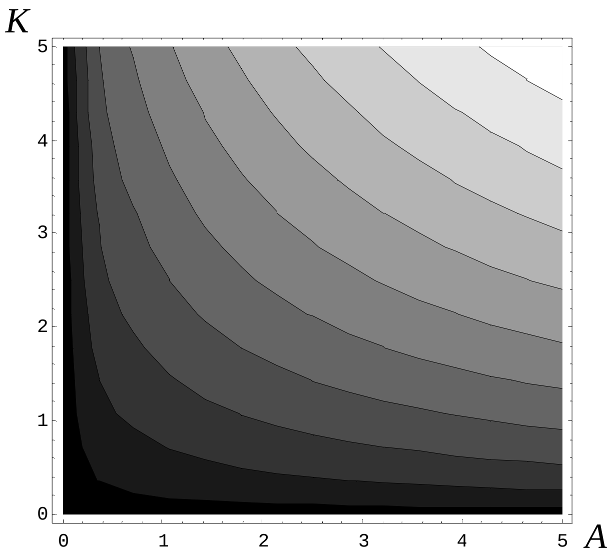
D. 2. 3 (*Isohöhenlinien*)
Ist $f: D(f) \to R^1, \quad D(f) \subseteq R^2$, eine Funktion zweier Variablen, so heißen die Punktmengen

$$M_c := \left\{(x, y)^T \in D(f) \mid f(x, y) = c\right\} \in R^2$$

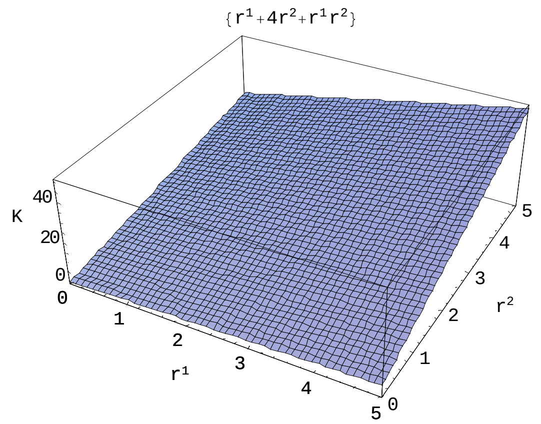
Isohöhenlinien von f (mit der Höhe $c \in R^1$).

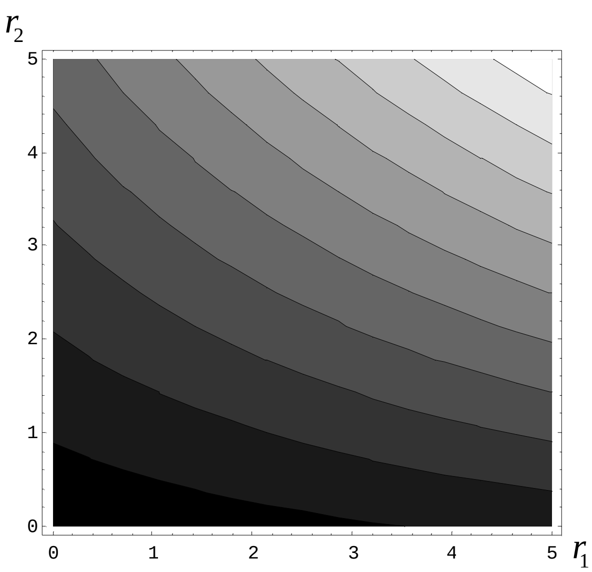
BS. 2. 1. (*Fortsetzung*)
Graph der Funktionen :
1. $y(A, K) = 2 \cdot A^{0.4} \cdot K^{0.6}$



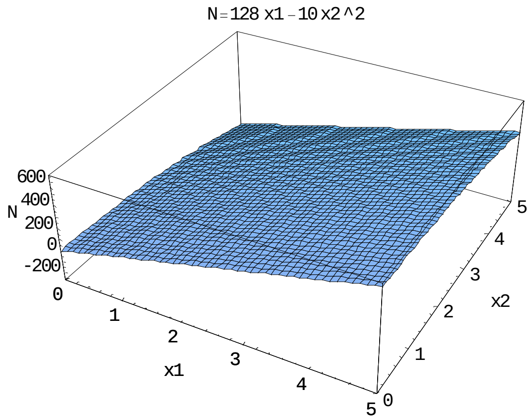


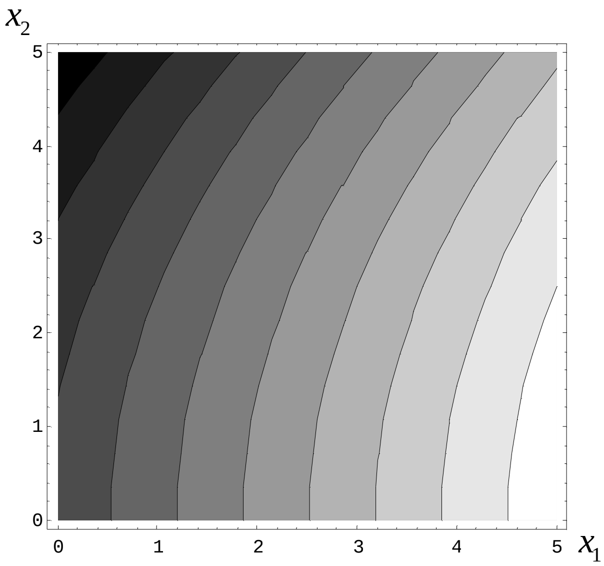
2. $K(r_1, r_2) = r_1 + 4r_2 + r_1 \cdot r_2$





3. $N(x_1, x_2) = 128x_1 - 10x_2^2$





<u>D. 2. 4.</u> (*Stetigkeit*)

Eine Funktion $f: D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$, heißt *an der Stelle* $x_0 \in D(f)$ *stetig*, falls zu jeder Umgebung $U_\varepsilon\left(f\left(x_0\right)\right) \subset R^1$ eine Umgebung $U_\delta\left(x^0\right) \subseteq D(f)$ existiert, so dass gilt:

$$\left\{z \in R^1 \mid z = f(x),\ x \in U_\delta(x^0)\right\} \subseteq U_\varepsilon(f(x^0))$$

<u>D. 2. 5</u> (*Grenzwert*)

Eine Funktion $f: D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$, hat an einer Stelle $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in D(f)$ den *Grenzwert* $a \in R^1$, wenn gilt

$$\lim_{\substack{y_1 \to x_1 \\ \vdots \\ y_n \to x_n}} f(y_1, ..., y_n) = a \; ,$$

wobei $(x_1, x_2, ..., x_n) \in U_\varepsilon(x) \subseteq D(f)$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ erfüllt sein muss.

<u>B. 2. 3.</u>
Der Grenzwert einer Funktion mehrerer Variablen kann bezüglich einer oder mehrerer Variablen gebildet werden. Will man bei der Grenzwertbildung z. B. nur die $i-$te Komponente $i \in \{1, 2, ..., n\}$ betrachten, so schreibt man

$$\lim_{y_i \to x_i} f(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n) \; .$$

Mann nennt dies den Grenzwert von f bezüglich x_i.

<u>S. 2. 1.</u>
Eine Funktion $f: \; D(f) \to R^1, \; D(f) \subseteq R^n$, ist an einer Stelle $x \in D(f)$ genau dann stetig, wenn f an der Stelle x einen Grenzwert $a \in R^1$ hat und darüber hinaus gilt:

$$a = \lim_{\substack{y_1 \to x_1 \\ \vdots \\ y_n \to x_n}} f(y_1, ..., y_n) = f(x_1, ..., x_n)$$

<u>D. 2. 6</u> (*Partielle Ableitung*)
Sei $f: \; D(f) \to R^1, \; D(f) \subseteq R^n$. Existiert für ein $i \in \{1, \; 2, ..., \; n\}$ an einer festen Stelle $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \operatorname{int} D(f)$ der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{\Delta x_i} \; ,$$

so wird dieser Grenzwert *die partielle Ableitung von f an der Stelle* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ genannt und mit

$$f_{x_i}(x_1, ..., x_n) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]_{(x_1, ..., x_n)}$$

bezeichnet. Man sagt, dass die Funktion f dann an der Stelle $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *partiell differenzierbar nach* x_i ist.
Ist f nach jeder Stelle einer offenen Punktmenge $D \subseteq D(f)$ partiell nach x_i differenzierbar ist, so heißt f *partiell nach* x_i *differenzierbar über* D.

B. 2. 4.
Existiert der Grenzwert in D. 2. 6. an allen Stellen $x \in D(f)$, so ist f_{x_i} wieder eine Funktion von n unabhängigen Variablen auf $D(f)$. Sie wird *die partielle Ableitung von* f *nach* x_i genannt.

D. 2. 7. (*Differenzierbarkeit*)
Existieren für eine Funktion $f: D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$ alle partiellen Ableitungen $f_{x_i},\ i = 1, 2, ..., n$ auf einem Bereich $D \subseteq D(f)$ als stetige Funktionen, so heißt f auf D (*stetig*) *differenzierbar*. Im Falle $D = D(f)$ spricht man von *Differenzierbarkeit* der Funktion schlechthin.

S. 2. 2.
Die Funktionen $f: D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$ und $g: D(g) \to R^1,\ D(g) \subseteq R^n$ seien über $D \subseteq D(f) \cap D(g)$ partiell differenzierbar nach $x_i,\ i \in \{1,\ 2, ...,\ n\}$.

1. Die Funktion $h(x) = c \cdot f(x),\ c \in R^1$, ist über D partiell differenzierbar nach x_i, und es gilt:

$$h_{x_i}(x) = c \cdot f_{x_i}(x) \quad (\textit{Faktorregel}).$$

2. Die Funktion $h(x) = f(x) + g(x)$ ist über D partiell differenzierbar nach x_i, und es gilt:

$$h_{x_i}(x) = f_{x_i}(x) + g_{x_i}(x) \quad (\textit{Summenregel}).$$

3. Die Funktion $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ist über D partiell differenzierbar nach x_i, und es gilt:

$$h_{x_i}(x) = f_{x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g_{x_i}(x) \quad (\textit{Produktregel}).$$

4. Die Funktion $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ist über D partiell differenzierbar nach x_i, falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ und es gilt:

$$h_{x_i}(x) = f_{x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g_{x_i}(x) \quad (\textit{Produktregel}).$$

$$h_{x_i}(x) = \frac{f_{x_i}(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g_{x_i}(x)}{[g(x)]^2} \quad (\textit{Quotientenregel}).$$

BS. 2. 2.
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$y(A, K) = 2 \cdot A^{0.2} \cdot K^{0.8}.$$

mit

A: Arbeitsinput,
K: Kapitalinput,

y: Output.

Berechnen und interpretieren Sie, ausgehend von der Faktorkombination $A=20,\ K=10,$ die 1. partiellen Ableitungen von $y(A,K)$.

Lösung:

$$y_A(A,K)=0.4\cdot A^{-0.8}\cdot K^{0.8}, \qquad y_A(20,\ 10)=0.229739671\approx 0.230,$$

d.h. erhöht sich *nur* der Arbeitsinput von 20 auf 21 Einheiten, so erhöht sich der Output um etwa 0.230 Einheiten. Zum Vergleich berechnen wir den exakten Zuwachs des Outputs:

$$y(21,\ 10)-y(20,\ 10)=23.19924517-22.9739671=0.225278072\approx 0.225$$

$$y_K(A,K)=1.6\cdot A^{0.2}\cdot K^{-0.2}, \qquad y_K(20,\ 10)=1.837917368\approx 1.84,$$

d.h. erhöht sich *nur* der Kapitalinput von 10 auf 11 Einheiten, so erhöht sich der Output um etwa 1.84 Einheiten. Zum Vergleich berechnen wir den exakten Zuwachs des Outputs:

$$y(20,\ 11)-y(20,\ 10)=24.79420245-22.9739671=1.82023535\approx 1.82.$$

(Die ersten partiellen Ableitungen einer Produktionsfunktion heißen auch *Grenzertragsfunktionen*.)

D. 2. 8. (***Gradient***)
Ist eine Funktion $f:\ D(f)\to R^1,\ D(f)\subseteq R^n$ an einer Stelle $x^0\in D(f)$ partiell differenzierbar, so heißt der Vektor

$$\nabla f\left(x^0\right)=gradf\left(x^0\right)=\left(f_{x_1},...,f_{x_n}\right)$$

der *Gradient* von f an der Stelle x^0.

BS. 2. 2. (*Fortsetzung*)
Bestimmen Sie den Gradientenvektor der Funktion

$$y(A,K)=2\cdot A^{0.2}\cdot K^{0.8}$$

im Punkt $(20,\ 10)$.

Lösung:

$$\nabla y\left(A,K\right)^T=\left(0.4\cdot A^{-0.8}\cdot K^{0.8},\ 1.6\cdot A^{0.2}\cdot K^{-0.2}\right)^T$$
$$\nabla y\left(20,\ 10\right)^T=\left(0.229739671,\ 1.837917368\right)^T\approx\left(0.23,\ 1.84\right)^T.$$

B. 2. 5.
Der Gradient einer Funktion an einer Stelle x^0 weist „in Richtung des steilsten Anstiegs“ (des Graphen) der Funktion.

D. 2. 9. (*Partielles Differential*)
Sei $f: D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$, eine differenzierbare Funktion, $x^0 \in D(f)$ und $\Delta x_i \in R^1$.
Dann heißt die reelle Zahl

$$df_{x_i} := f_{x_i}(x^0) \cdot \Delta x_i$$

das *partielle Differential* von f bezüglich x_i an der Stelle $x^0,\ i \in \{1,\ 2, ..., n\}$.

B. 2. 6.
Das partielle Differential bezüglich x_i ist eine Näherung an den Zuwachs der Funktion, den man erhält, wenn man die Komponente x_i um Δx_i verändert.

BS. 2. 2. (*Fortsetzung*)
Wie ändert sich der Output

a) näherungsweise
b) exakt,

wenn

1. der Arbeitsinput um 0.3 vermindert wird
2. der Kapitalinput um 0.1 Einheiten erhöht wird?

Lösung:
1.
a) $dy_A = y_A(20,10) \cdot (-0.3) = 0.229739671 \cdot (-0.3) = -0.068921901 \approx -0.0689$
b) $y(19.7,\ 10) - y(20,\ 10) = 22.90462791 - 22.9739671 = -0.06933919 \approx -0.0693$

2.

a) $dy_K = y_K(20,10) \cdot 0.1 = 1.837917368 \cdot 0.1 = 0.183791737 \approx 0.1837$,
b) $y(20,\ 10.1) - y(20,\ 10) = 23.15757578 - 22.9739671 = 0.1836$.

D. 2. 10. (*Totales Differential*)
Sei $f: D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$, eine differenzierbare Funktion, $x^0 \in D(f)$ und $\Delta x_i \in R^1,\ i = 1,\ 2, ..., n$. Dann heißt die reelle Zahl

$$df := \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x^0) \cdot \Delta x_i$$

das totale Differential von f an der Stelle x^0.

B. 2. 7.
Analog den partiellen Differentialen beschreibt das totale Differential an einer Stelle $x = (x_1,\ x_2,...,x_n)$ die näherungsweise Änderung des Funktionswertes bei Veränderung der Komponenten x_i um $\Delta x_i,\ i = 1,\ 2,...,n$.
Das totale Differential df hängt ähnlich wie die partiellen Differentiale von der Stelle x^0. und den Änderungen $\Delta x_i,\ i = 1,\ 2,...,n$, ab.
Zur Bestimmung von Näherungswerten für einen Funktionswert einer Stelle $x = (x_1 + \Delta x_1,\ x_2 + \Delta x_2,...,x_n + \Delta x_n)$ in der Nähe von $x = (x_1,\ x_2,...,x_n)$ dient die *Näherungsformel*

$$f\left(x_1 + \Delta x_1,\ x_2 + \Delta x_2,...,x_n + \Delta x_n\right) \approx f\left(x_1,\ x_2,...,x_n\right) + df\ .$$

Je kleiner die Änderungen $\Delta x_i,\ i = 1,\ 2,...,n$, sind, umso kleiner ist der absolute Fehler, den der Näherungswert gegenüber dem exakten Funktionswert hervorruft.

BS. 2. 2. **(*Fortsetzung*)**
Wie ändert sich der Output

a) näherungsweise
b) exakt,

wenn *gleichzeitig* der Arbeitsinput um 0.3 vermindert und der Kapitalinput um 0.1 Einheiten erhöht wird?

Lösung:

a) $dy = y_A \cdot dA + y_K .dK = -0.068921901 + 0.183791737 = 0.114869836 \approx 0.115$,

b) $\Delta y = y(19.7,\ 10.1) - y(20,\ 10) = 23.08768242 - 22.9739671 = 0.11371532 \approx 0.114$

D. 2. 11 **(*Partielle Ableitung 2. Ordnung*)**
Sei $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$, eine auf $D(f)$ differenzierbare Funktion der n unabhängigen Variablen $x_1,...,x_n$ und bezeichne $f_{x_i}(x_1,...,x_n)$ die Ableitungsfunktion von f nach x_i .
Existiert die partielle Ableitung der Ableitungsfunktion $f_{x_i}(x_1,...,x_n)$ nach der Variablen $x_j,\ j \in \{1,...,n\}$, an der Stelle $x = (x_1,...,x_n)$, so heißt sie *die partielle Ableitung 2. Ordnung von f nach x_i und x_j an der Stelle* x . Man schreibt:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{(x_1,...,x_n)} = f_{x_i x_j}\left(x_1,...,x_n\right).$$

Falls $f_{x_i x_j}$ auf dem ganzem Definitionsbereich existiert, so wird $f_{x_i x_j}$ *partielle Ableitung 2. Ordnung nach x_i und x_j von f genannt.*

B. 2. 8.
Eine zweimal partiell differenzierbare Funktion von n Variablen hat also n^2 partielle Ableitungen 2. Ordnung. Für genügend oft differenzierbare Funktionen können sukzessiv partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnung definiert werden. Bei n Variablen hat man n^r partielle Ableitung r-ter Ordnung.

S. 2. 3.
Sind die partiellen Ableitungen 2. Ordnung einer Funktion $f: \ D(f) \to R^1, \ D(f) \subseteq R^n$, stetige Funktionen, so gilt

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$$

B. 2. 9.
1. Mann nennt $f_{x_i x_j}$ auch die *gemischten partiellen Ableitungen 2. Ordnung*, falls $i \neq j$.

   Im Falle $i = j$ schreibt man anstelle von $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ meist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.
2. Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung fasst man auch in der sog. *Hessesche Matrix* zusammen:

$$H\Big|_x := \begin{pmatrix} f_{x_1^2} & . & . & . & f_{x_1 x_n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ f_{x_n x_1} & . & . & . & f_{x_n^2} \end{pmatrix}.$$

D. 2. 12. (*Partielle Elastizität*)
Sei $f: \ D(f) \to R^1, \ D(f) \subseteq R^n$, eine auf $D(f)$ differenzierbare Funktion der n unabhängigen Variablen $x_1, ..., x_n$.
Als *partielle Elastizität von* f bezüglich x_i bezeichnet man

$$\varepsilon_{f, x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) := \frac{x_i}{f(x_1, x_2, ..., x_n)} \cdot f_{x_i}, \qquad i = 1, \ 2, ..., n.$$

B. 2. 10.
Der Zahlenwert der partiellen Elastizität ε_{f, x_i} gibt an, um wie viel Prozent sich der Funktionswert $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ näherungsweise ändert, wenn sich die Variable x_i um ein Prozent ändert und die übrigen Variablen konstant bleiben.

BS. 2. 2. (*Fortsetzung*)
Bestimmen und interpretieren Sie die partiellen Elastizitäten der Produktionsfunktion

$$y(A, K) = 2 \cdot A^{0.2} \cdot K^{0.8}$$

im Punkt $(20,\ 10)$.

Lösung:

$$\varepsilon_{y,A}(A,K) = \frac{A}{y(A,K)} \cdot y_A$$
$$= \frac{A}{2 \cdot A^{0.2} \cdot K^{0.8}} \cdot 0.4 \cdot A^{-0.8} \cdot K^{0.8} = 0.2$$

Erhöht man die Arbeitskräfte um 1% (*egal von welchem Niveau aus*), so erhöht sich die Produktion um etwa 0.2 Prozent.

$$\varepsilon_{y,K}(A,K) = \frac{K}{y(A,K)} \cdot y_K$$
$$= \frac{K}{2 \cdot A^{0.2} \cdot K^{0.8}} \cdot 1.6 \cdot A^{0.2} \cdot K^{-0.2} = 0.8$$

Erhöht man das Kapital um 1% (*egal von welchem Niveau aus*), so erhöht sich die Produktion um etwa 0.8 Prozent.
Damit erhalten die Exponenten in der Cobb-Douglas-Funktion einen ökonomischen Inhalt.

D. 2. 13 (*Implizite und explizite Funktionen*)
Sei $f:\ D(f) \to R^2$ eine Funktion der Variablen x und y. Eine Funktion $y = g(x),\ x \in D(g) \subseteq R^1$, die in der Form

$$f(x,y) = f(x, g(x)) = 0$$

vorliegt, heißt *implizit*. Liegt g in der Form $y = g(x)$ vor, dann heißt g *explizit*.

B. 2. 11.
Jede explizit gegebene Funktion $y = g(x)$ kann als implizite Funktion $f\left(x,y\right) = y - g(x) = 0$ geschrieben werden. Dagegen kann eine nur explizit gegebene Funktion nicht auf eine explizite Form gebracht werden. Der Graph der Funktion g entspricht der Isohöhenlinie von f mit der Höhe $c = 0$.

S. 2. 4.
Sei $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^2$ eine auf $D(f)$ differenzierbare Funktion. Sei die Funktion, durch die Gleichung $f\left(x,y\right) = 0$ implizit gegeben.
Dann gilt für alle Stellen $\left(x,y\right)^T \in D(f)$ mit $f_y(x,y) \neq 0$:

$$g'(x) = -\frac{f_x\left(x,y\right)}{f_y\left(x,y\right)}.$$

Ist $x = h(y)$ die zu $y = g(x)$ gehörende Umkehrfunktion, dann gilt für alle Stellen $\left(x,y\right)^T \in D(f)$ mit $f_x(x,y) \neq 0$:

$$h'(x) = -\frac{f_y(x,y)}{f_x(x,y)}.$$

<u>D. 2. 14.</u> (*Homogenität, Homogenitätsgrad*)
Eine Funktion f heißt *homogen vom Grade* r, wenn für alle $x \in D(f)$ und alle $\lambda \in R^1,\ \lambda > 0$ gilt:

$$\lambda \cdot x \in D(f) \text{ und } f(\lambda \cdot x) = \lambda^r \cdot f(x).$$

Dabei heißt $r \in R^1$ der *Homogenitätsgrad von* f.

<u>BS. 2. 3.</u>
Die Produktionsfunktion eines Unternehmens für die Herstellung einer Ware aus den Produktionsfaktoren Arbeitskraft A und Kapital K lautet:

$$y(A,K) = 2A^3 + K^3 + 0.5A^2K$$

Es gilt

$$y(\lambda \cdot A, \lambda \cdot K) = 2 \cdot (\lambda A)^3 + (\lambda K)^3 + 0.5 \cdot (\lambda A)^2 \cdot (\lambda K)$$

$$= \lambda^3 \cdot y(A,K).$$

Man sieht, dass bei Vervielfachung der unabhängigen Variablen x und y um den gleichen Faktor λ die Produktion $y(A,K)$ auf das λ^3-fache steigt. Der Homogenitätsgrad der Funktion ist also gleich 3.

<u>B. 2. 12.</u>
Der Homogenitätsgrad kann jeden beliebigen reellen Wert annehmen. Im eindimensionalen Fall sind die Potenzfunktionen

$$f(x) = ax^r, \quad a \in R^1,\ a \neq 0,$$

homogene Funktionen von Grade r.

<u>S. 2. 5.</u>
Die Funktion $f: D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$ sei homogen vom Grade r. Dann gilt die *Eulersche Formel*:

$$r \cdot f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_1,\ldots,x_n) \cdot x_i.$$

Gilt umgekehrt die obige Beziehung für eine Funktion f an allen Stellen ihres Definitionsbereiches, so ist f homogen von Grade r.

BS. 2. 3. (***Fortsetzung***)
Für die Funktion

$$y(A,K)=2A^3+K^3+0.5A^2K$$

gilt:

$$y_A(A,K)\cdot A=6A^3+A^2\cdot K\,,\qquad y_K(A,K)=3A^3+0.5A^2\cdot K\,.$$

Die Addition beider Gleichungen ergibt

$$y_A(A,K)\cdot A+y_K(A,K)=6A^3+3K^3+1.5A^2K=3\cdot y\left(A,K\right).$$

D. 2. 15. (***Konvexität, Konkavität***)
Der Definitionsbereich $D(f)\subseteq R^n$ einer reellwertigen Funktion f sei eine konvexe Punktmenge.
Dann heißt die Funktion f

1. *konvex*, falls für alle Stellen $x^1,x^2\in D(f)$ und für alle $\lambda\in[0,\ 1]$ gilt:

$$f\left(\lambda\cdot x^1+(1-\lambda)\cdot x^2\right)\le\lambda\cdot f\left(x^1\right)+(1-\lambda)\cdot f\left(x^2\right),$$

2. *konkav*, falls für alle Stellen $x^1,x^2\in D(f)$ und für alle $\lambda\in[0,\ 1]$ gilt:

$$f\left(\lambda\cdot x^1+(1-\lambda)\cdot x^2\right)\ge\lambda\cdot f\left(x^1\right)+(1-\lambda)\cdot f\left(x^2\right),$$

3. *streng konvex* bzw. *streng konkav*, falls für alle Stellen, $x^1,x^2\in D(f)$, $x^1\neq`x^2$ und für alle $\lambda\in\,]0,\ 1[$ gilt:

$$f\left(\lambda\cdot x^1+(1-\lambda)\cdot x^2\right)<\lambda\cdot f\left(x^1\right)+(1-\lambda)\cdot f\left(x^2\right)$$

bzw.

$$f\left(\lambda\cdot x^1+(1-\lambda)\cdot x^2\right)>\lambda\cdot f\left(x^1\right)+(1-\lambda)\cdot f\left(x^2\right).$$

B. 2. 13.

1. Ist eine Funktion f konvex (bzw. konkav), so ist die Funktion $(-f)$ konkav (bzw. konvex).
2. Die Konvexität bzw. Konkavität einer Funktion f lässt sich auch auf (konvexen) Teilmengen von $D(f)$ erklären, speziell auf Intervallen $[a,\ b]\subseteq D(f)$ oder $\varepsilon-$Umgebungen $U_\varepsilon(x^0)\subseteq D(f)$.
3. Der Definitionsbereich $D(f)$ einer konvexen oder konkaven Funktion muss konvex sein. Andernfalls könnte trotz $x^1,x^2\in D(f)$ gelten $\left(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2\right)\notin D(f)$, wodurch $f\left(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2\right)$ nicht erklärt ist.
4. Eine Untersuchung auf Konvexität (Konkavität) einer Funktion mithilfe der Definition D. 2. 15. ist oft sehr aufwendig und schwierig. Daher benutzt man andere Kriterien.

<u>D. 2. 16.</u> (*Quadratische Form)*

Sei $A := (a_{ij}),\ i,\ j = 1,\ 2, \dots, n,$ eine symmetrische Matrix und $x \in R^n$. Dann nennt man den Ausdruck

$$Q = x^T Ax$$

bzw.

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

quadratische Form.

<u>D. 2. 17.</u> (*Definitheit)*

Eine quadratische Form heißt

1. *positiv* (*negativ*) *definit*, wenn für alle $x \neq 0, x \in R^n$, die Form Q positiv (negativ) ist.
2. *positiv* (*negativ*) *semidefinit* genau dann, wenn alle Eigenwerte von A nichtnegativ (nichtpositiv) sind.
3. *indefinit* genau dann, wenn A positive und negative Eigenwerte hat.

<u>S. 2. 6.</u>

1. Eine quadratische Form ist positiv definit genau dann, wenn für die folgenden Unterdeterminanten von A gilt:

$$\det a_1 > 0, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} > 0\,.$$

2. Eine quadratische Form ist negativ definit, wenn für die folgenden Unterdeterminanten gilt:

$$\det a_1 > 0, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} < 0,\ \dots,\ \ (-1)^n \det\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} > 0\,.$$

<u>BS. 2. 4.</u>

Untersuchen Sie folgende Matrix auf Definitheit.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\det 1 = 1 > 0, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 > 0, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 5 > 0 .$$

Also ist A positiv definit.

S. 2. 7.

Hat eine Funktion $f:\ D(f) \to R^1$ stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung auf dem konvexen und offenen Definitionsbereich $D(f) \subseteq R^n$, so gilt:

1. f ist genau dann konvex, wenn die Hesse-Matrix

$$H(x) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & . & . & . & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_1} & . & . & . & f_{x_2x_n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & . & . & . & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

   von f für alle $x \in D(f)$ positiv semidefinit ist.

2. f ist genau dann konkav, wenn die Hesse-Matrix von f für alle $x \in D(f)$ negativsemidefinit ist.

S. 2. 8.

Hat eine Funktion stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung auf dem konvexen und offenen Definitionsbereich $D(f) \subseteq R^n$, so gilt:
Die Funktion f ist streng konvex, wenn die Hesse-Matrix für alle $x \in D(f)$ positiv definit ist, und f ist streng konkav, wenn die Hesse-Matrix für alle $x \in D(f)$ negativ definit ist.

B. 2. 14.

Für den fall $n = 2$ gibt es eine zur Semidefinitheit äquivalente Aussage, die dann zu den folgenden Kriterien für Konvexität und Konkavität einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion zweier Variablen führt:

S. 2. 9.

Eine Funktion f zweier unabhängiger Variablen sei auf einem konvexen und offenen Definitionsbereich $D(f)$ erklärt und habe auf dem Definitionsbereich stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung. Dann gilt:

1. f ist genau dann konvex, wenn gilt:

$$f_{xx} \geq 0, \quad f_{yy} \geq 0, \quad f_{xx} \cdot f_{yy} \geq \left(f_{xy}\right)^2, \quad \forall \left(x, y\right)^T \in D(f) .$$

2. f ist genau dann konkav, wenn gilt:

$$f_{xx} \le 0, \quad f_{yy} \le 0, \quad f_{xx} \cdot f_{yy} \ge \left(f_{xy}\right)^2, \quad \forall (x,y)^T \in D(f).$$

<u>B. 2. 15.</u>
Gilt in Satz S.2.9. das Kriterium 1. bzw. 2., so folgt aus $f_{xx} \ge 0$ sofort $f_{yy} \ge 0$ bzw. aus $f_{xx} \le 0$ auch $f_{yy} \le 0$ und umgekehrt. Es reicht also entweder f_{xx} oder f_{yy} zu untersuchen.

<u>D. 2. 18.</u> (*Das Differential 2. Ordnung*)
Sei die Funktion f auf $D(f) \subseteq R^n$ definiert und habe stetige, partielle Ableitungen zweiter Ordnung. Sei $x \in D(f)$ und seien $\Delta x_1, ..., \Delta x_n$ reelle Zahlen.
Dann ist das *Differential 2. Ordnung an der Stelle* x erklärt durch:

$$d^2 f(x) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \Delta x_i \cdot \Delta x_j .$$

<u>D. 2. 19.</u> (*Relative und absolute Extrema*)
1. Man sagt, dass eine Funktion $f: D(f) \to R^1, D(f) \subseteq R^n$, an der Stelle $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0) \in D(f)$ ein *globales* (*absolutes*) *Maximum* bzw. *Minimum* hat, falls gilt:

$$f(x^0) \ge f(x), \quad \forall x \in D(f)$$

bzw.

$$f(x^0) \le f(x), \quad \forall x \in D(f).$$

Man spricht von einem *strikten globalen* (*absoluten*) *Maximum* bzw. *Minimum*, falls gilt:

$$f(x^0) > f(x), \quad \forall x \in D(f), \quad x \ne x^0$$

bzw.

$$f(x^0) < f(x), \quad \forall x \in D(f), \quad x \ne x^0 .$$

2. Man sagt, dass eine Funktion $f: D(f) \to R^1, D(f) \subseteq R^n$, an der Stelle $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0) \in D(f)$ ein *lokales* (*relatives*) *Maximum* bzw. *Minimum* hat, falls gilt:

$$f(x^0) \ge f(x), \quad \forall x \in D(f) \cap U_\varepsilon(x^0)$$

bzw.

$$f(x^0) \le f(x), \quad \forall x \in D(f) \cap U_\varepsilon(x^0).$$

Man spricht von einem *strikten lokales* (*relatives*) *Maximum* bzw. *Minimum*, falls gilt:

$$f(x^0) > f(x), \quad \forall x \in D(f) \cap U_\varepsilon(x^0), \quad x \ne x^0$$

bzw.

$$f(x^0) < f(x), \quad \forall x \in D(f) \cap U_\varepsilon(x^0), \quad x \ne x^0 .$$

<u>B. 2. 16.</u>
Der Oberbegriff für Minima and Maxima ist *Extrema*.

D. 2. 20. (***Kritische Stelle***)
Sei $f:\ D(f)\to R^1$ mit $y=f(x_1,...,x_n),\ D(f)\subseteq R^n$, an der Stelle $x^0=(x_1^0,...,x_n^0)\in \operatorname{int}D(f)$ eine nach allen ihren Variablen partiell differenzierbare Funktion. Der Punkt x^0 heißt eine *kritische Stellet* von f, falls gilt

$$f_{x_i}(x_1^0,...x_n^0)=0,\quad i=1,\ 2,...,n.$$

S. 2. 10.
Sei $f:\ D(f)\to R^1$ eine an der Stelle $x^0=(x_1^0,...,x_n^0)\in \operatorname{int}D(f)$ nach allen ihren Variablen partiell differenzierbare Funktion.
Wenn f in $(x_1^0,...,x_n^0)$ ein relatives Extremum besitzt, dann ist $(x_1^0,...,x_n^0)$ eine kritische Stelle von f.

S. 2. 11.
Sei $x^0=(x_1^0,...,x_n^0)$ eine kritische Stelle der Funktion $f:\ D(f)\to R^1$. Ist f in einer Umgebung $U_\varepsilon(x^0)$ streng konvex bzw. streng konkav, so besitzt f an der Stelle x^0 ein striktes Minimum bzw. ein striktes Maximum.

S. 2. 12.
Die Funktion $f:\ D(f)\to R^1$ besitze stetige Ableitungen zweiter Ordnung an der Stelle $x^0=(x_1^0,...,x_n^0)\in \operatorname{int}D(f)$ und x^0 sei eine kritische Stelle von f. Ist die Hesse-Matrix an der Stelle x^0

1. negativ definit, so besitzt f an der Stelle x^0 ein striktes lokales Maximum,
2. positiv definit, so besitzt f an der Stelle x^0 ein striktes lokales Minimum.

S. 2. 13.
Eine Funktion $f:\ D(f)\to R^1,\ D(f)\subseteq R^2$ besitze stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung an der Stelle $x^0=(x_1^0,x_2^0)\in \operatorname{int}D(f)$.
Ist $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ eine kritische Stelle von f und gilt

$$f_{x_1x_1}(x_1^0,x_2^0)\cdot f_{x_2x_2}(x_1^0,x_2^0)>\left(f_{x_1x_2}(x_1^0,x_2^0)\right)^2$$

sowie

1. $f_{x_1x_1}(x_1^0,x_2^0)>0$ (und damit auch $f_{x_2x_2}(x_1^0,x_2^0)>0$), so besitzt f an der Stelle (x_1^0,x_2^0) ein striktes lokales Minimum bzw.

2. $f_{x_1x_1}(x_1^0,x_2^0)<0$ (und damit auch $f_{x_2x_2}(x_1^0,x_2^0)<0$), so besitzt f an der Stelle (x_1^0,x_2^0) ein striktes lokales Maximum.

S. 2. 14.
Eine Funktion $f:\ D(f)\to R^1,\ D(f)\subseteq R^2$ besitze stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung an der Stelle $x^0=(x_1^0,x_2^0)\in \operatorname{int}D(f)$.

Fall f an der Stelle (x_1^0, x_2^0) ein lokales Maximum bzw. Minimum besitzt, ist (x_1^0, x_2^0) eine kritische Stelle von f, und es gilt

$$f_{x_1x_1}(x_1^0, x_2^0) \cdot f_{x_2x_2}(x_1^0, x_2^0) > \left(f_{x_1x_2}(x_1^0, x_2^0)\right)^2$$

sowie $$f_{x_1x_1}(x_1^0, x_2^0) \le 0$$

bzw. $$f_{x_1x_1}(x_1^0, x_2^0) \ge 0.$$

<u>D. 2. 21.</u> (*Sattelstelle, Sattelpunkt*)
Sei $f: D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^2$, eine Funktion, die in $(x_1^0, x_2^0) \in D(f)$ stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung besitzt. Sei $(x_1^0, x_2^0) \in D(f)$ eine kritische Stelle der Funktion f. Dann heißt (x_1^0, x_2^0) eine *Sattelstelle von* f, falls f an der Stelle (x_1^0, x_2^0) kein lokales Extremum hat. Der zugehörige Punkt $\left(x_1^0, x_2^0, f(x_1^0, x_2^0)\right)$ heißt *Sattelpunkt* von f.

<u>S. 2. 15.</u>
Eine Funktion $f: D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^2$ besitze stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung an der Stelle $(x_1^0, x_2^0) \in D(f)$ und (x_1^0, x_2^0) sei eine kritische Stelle von f. Gilt außerdem

$$f_{x_1x_1}(x_1^0, x_2^0) \cdot f_{x_2x_2}(x_1^0, x_2^0) < \left(f_{x_1x_2}(x_1^0, x_2^0)\right)^2,$$

so hat f an der Stelle (x_1^0, x_2^0) eine Sattelstelle.

<u>B. 2. 17.</u>
Gilt für eine kritische Stelle (x_1^0, x_2^0)

$$f_{x_1x_1}(x_1^0, x_2^0) \cdot f_{x_2x_2}(x_1^0, x_2^0) = \left(f_{x_1x_2}(x_1^0, x_2^0)\right)^2,$$

so kann an dieser Stelle ein relatives Extremum oder auch ein Sattelpunkt von f vorliegen.

<u>BS. 2. 5.</u>
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$Q(r_1, r_2) = 440 + 4r_1 + 10r_2 - r_1^2 + 3r_1 \cdot r_2 - 2.5r_2^2$$

mit

r_1, r_2: Inputmengen
Q: Output.

Bestimmen Sie die Inputkombination, für die der Output maximal wird.

Solution:

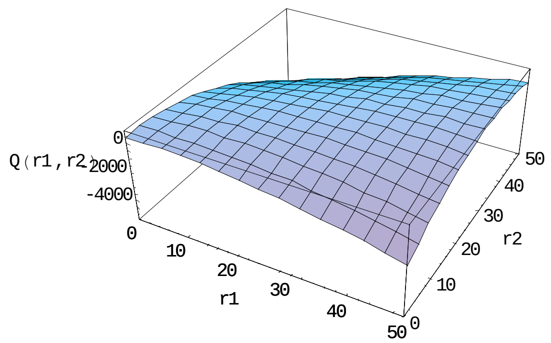
$$Q_{r_1}(r_1,r_2) = 4 - 2r_1 + 3r_2 := 0$$
$$Q_{r_2}(r_1,r_2) = 10 + 3r_1 - 5r_2 := 0$$

$$\Rightarrow \quad r_1 = 50, \quad r_2 = 32$$
$$Q_{r_1r_1}(r_1,r_2) = -2, \quad Q_{r_1r_2}(r_1,r_2) = 3, \quad Q_{r_2r_2}(r_1,r_2) = -5\,.$$

Für die Inputkombination $r_1 = 50,\ r_2 = 32$ wird der Output maximal sein, denn:

$$Q_{r_1r_1}(r_1,r_2)\cdot Q_{r_2r_2}(r_1,r_2) - \left[Q_{r_1r_2}(r_1,r_2)\right]^2 = (-2)\cdot(-5) - 3^2 = 1 > 0 \text{ and } Q_{r_1r_1}(r_1,r_2) = -2 < 0\,.$$

Der maximale Output lautet dann $Q(50,32) = 700$.



<u>D. 2. 22.</u> (*Extremwertproblem unter Nebenbedingungen*)
Unter einem *Extremwertproblem unter Nebenbedingungen* verstehen wir folgende Aufgabe:

$$\max\left\{ f : D(f) \to R^1, D(f) \subseteq R^n \mid g_i(x) = 0,\ x \in D(f),\ i = 1,2,\ldots,m \right\}.$$
(min)

<u>B. 2. 18.</u>
Für die Lösung der Extremwertprobleme unter Nebenbedingungen bieten sich zwei Möglichkeiten an:

(1) die Variablensubstitution,
(2) die Multiplikatorenregel von Lagrange.

<u>B. 2. 19.</u> (*Variablensubstitution*)
Für den Fall, dass sich das System der Gleichungen nach m der Variablen auflösen lässt, kann man das Problem auf ein übliches Extremwertproblem zurückführen.
Durch $g_i(x),\ i = 1,2,\ldots m,$ sind dann nämlich m Funktionen $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ von $n-m$ Variablen $x_{m+1},\ldots,\varphi_n$ gegeben, so dass gilt:

$$x_1 = \varphi_1(x_{m+1},...,x_n)$$
$$x_2 = \varphi_2(x_{m+1},...,x_n)$$
.
.
.
$$x_m = \varphi_m(x_{m+1},...,x_n)\,.$$

Setzt man die so gewonnenen Ausdrücke für $x_1,...,x_m$ in die Funktion f ein, deren Extremwerte gesucht sind, so erhält man eine zusammengesetzte Funktion f^*, die nur noch von den $n-m$ Variablen $x_{m+1},...,x_n$ abhängt. Diese Variablen unterliegen ihrerseits keinen weiteren Beschränkungen mehr. Damit hat man:

$$\max_{(\min)}\left\{ f^*: D(f^*) \to R^1, D(f^*) := D(f) \cap D(\varphi_1) \cap D(\varphi_1) \cap ... \cap D(\varphi_m) \right\}.$$

<u>S. 2. 16.</u>

Seien $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^2$ und $g:\ D(g) \to R^1,\ D(g) \subseteq R^2$. Es bestehe das Problem

$$\max_{(\min)}\left\{ f(x_1,x_2) \mid g(x_1,x_2) = 0 \right\}.$$

Sowohl f als auch g sollen nach allen ihren Variablen stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen. Zudem gelte in einer Umgebung eines inneren Punktes $\left(x_1^0, x_2^0\right) \in D(g)$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \neq 0 \quad \left(\text{oder } \frac{\partial g}{\partial x_2} \neq 0\ \right).$$

Dann wird durch $g(x_1,x_2)$ implizit eine Funktion φ (bzw. ψ) gegeben, derart dass $x_1 = \varphi(x_2)$ (bzw. $x_2 = \psi(x_1)$) gilt.

In diesem Falle ist eine notwendige Bedingung für ein Extremum von f an der Stelle $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ unter der Nebenbedingung $g(x_1,x_2) = 0$ dadurch gegeben, dass an der Stelle $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} \right) = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}} \right) = 0$$

BS. 2. 6.
Ein Konsument hat für zwei Güter G_1 und G_2 die Nutzenfunktion

$$U(x,y) = 2x \cdot y,\ \ (x, y > 0)\,.$$

Hier sind:

x: die Menge des Gutes G_1,

y: die Menge des Gutes G_2.

Die Güter G_1 bzw. G_2 kosten 3 GE/ME bzw. 2 GE/ME.
Der Konsument möchte für die Güterbeschaffung genau 60 GE ausgeben.
Für welche Güterkombination hat der Konsument den maximalen Nutzen?

Lösung:

Es liegt folgendes Problem vor:

$$U(x,y) = 2x \cdot y \to \text{max!}$$

unter der Nebenbedingung

$$3x + 2y = 60\,.$$

Es gilt:

$$y = -\frac{3}{2}x + 30\,,$$

$$U^*(x) = 2x \cdot \left(-\frac{3}{2}x + 30\right) \to \text{max!}$$

$$U^*(x) = -3x^2 + 60x \to \text{max!}$$

$$\frac{dU^*}{dx} = -6x + 60\,, \qquad \frac{dU^*}{dx} := 0 \quad \Rightarrow \quad x = 10, \qquad \frac{d^2U^*}{dx^2} = -6 < 0\,.$$

Damit nimmt die Funktion $U^*(x)$ ihr absolutes Maximum in $x = 10$. Die Substitution dieses Wertes in die Nebenbedingung liefert $y = 15$.
Für die Güterkombination $x = 10$ und $y = 15$ erzielt der Konsument einen maximalen Nutzen von $U(10,15) = 300$ Einheiten.

S. 2. 17. (*Lagrangesche Multiplikatorregel*)
Seien f und $g_i, i = 1,2,...,m,$ reellwertige Funktionen von n reellen Variablen $x_1, x_2, ..., x_n$ mit $m < n$. Die Funktionen f und $g_1, g_2, ..., g_m$ mögen in einer Umgebung $U_\varepsilon\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ einer Stelle $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) \in D(f) \cap D(g_1) \cap ... \cap D(g_m)$ nach allen Variablen stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen.

Die (Jacobische) Matrix

$$J(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}, & . & . & . & . & , \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}, & . & . & . & . & , \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

besitze an der Stelle $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ den Rang m.
Sei

$$L\left(x_1, ..., x_n; \lambda_1, ..., \lambda_m\right) := f(x_1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, ..., x_n)$$

die *Lagrangefunktion* des gegebenen Problems.
Dann ist eine notwendige Bedingung für ein Extremum von $f(x_1, ..., x_n)$ an der Stelle $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ unter den Nebenbedingungen $g_i(x) = 0,\ i = 1, 2, ..., m$:

$$\begin{aligned} L_{x_j}\left(x_1^0, ..., x_n^0; \lambda_1^0, ..., \lambda_m^0\right) &= 0, \quad j = 1, 2, ..., n, \\ L_{\lambda_i}\left(x_1^0, ..., x_n^0; \lambda_1^0, ..., \lambda_m^0\right) &= 0, \quad i = 1, 2, ..., m. \end{aligned}$$

B. 2. 20.
Auf die hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines relativen Extremums einer Funktion mit mehreren Variablen unter Nebenbedingungen als Gleichungen wollen wir hier nicht eingehen.

BS. 2. 7.
Lösen Sie das Beispiel BS. 2. 6. nach der Methode der Lagrange-Multiplikatoren. (Verwenden Sie dazu nur die notwendigen Bedingungen.)

Lösung:

$$L\left(x, y; \lambda\right) = 2x \cdot y + \lambda \cdot \left(3x + 2y - 60\right),$$

$$\left.\begin{array}{l} L_x\left(x, y; \lambda\right) = 2y + 3\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{2}{3}x \\ L_y\left(x, y; \lambda\right) = 2x + 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -x \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}y$$

$$L_\lambda\left(x, y; \lambda\right) = 3x + 2y - 60 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{2}{3}y \\ 3x + 2y - 60 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x = 10, \quad y = 15$$

$$\lambda = -10.$$

D. 2. 23. (***Problem der mathematischen Optimierung***)
Unter dem *Problem der mathematischen Optimierung* verstehen wir

$$opt\left\{ f(x) \mid g_i(x) \le 0,\ i = 1,2,...,m;\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,...,n \right\}.$$

B. 2. 21.
Um die Existenz einer Lösung des Problems der mathematischen Optimierung sicherzustellen und um auch Lösungsverfahren angeben zu können, sind die folgenden Bedingungen wichtig:

(B1) $g_1,...,g_n$ sind konvex.
(B2) f ist auf dem *zulässigen Bereich*

$$M := \left\{ x \in R \ \mid g_i(x) \le 0,\ i = 1,2,...,m;\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,...,n \right\}$$

konvex.
(B3) M besitze mindestens einen inneren Punkt, d.h. $\operatorname{int} M \ne \varnothing$.
(B4) $f, g_1,...,g_m$ besitzen stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung nach allen Variablen $x_1, x_2,..., x_n$.

D. 2. 23. (***Sattelpunkt der Lagrangefunktion***)
Man sagt, die Lagrangefunktion besitzt an der Stelle f einen *Sattelpunkt* bezüglich $\left(x_1,...,x_2;\lambda_1,...,\lambda_m\right) \ge 0$, wenn gilt:

$$L\left(x_1^0,...,x_n^0;\lambda_1,...,\lambda_m\right) \le L\left(x_1^0,...,x_n^0;\lambda_1^0,...,\lambda_m^0\right) \le L\left(x_1,...,x_n;\lambda_1^0,...,\lambda_m^0\right),$$

$$\forall \left(x_1,...,x_n\right) \ge 0, \quad \forall (\lambda_1,...,\lambda_m) \ge 0.$$

S. 2. 18.
Ist $\left(x_1^0,...,x_n^0;\lambda_1^0,...,\lambda_m^0\right)$ ein Sattelpunkt von L bezüglich $\left(x_1,...,x_2;\lambda_1,...,\lambda_m\right) \ge 0$, so ist $\left(x_1^0,...x_n^0\right)$ eine Lösung des Problems der mathematischen Optimierung.

S. 2. 19.
Es gelten die Bedingungen (B1-B4). Weiter sei $\left(x_1^0,...x_n^0\right)$ eine Lösung des Problems der mathematischen Optimierung.
Dann existieren m reelle Zahlen $\lambda_1^0,...,\lambda_m^0 \ge 0$, so dass f ein Sattelpunkt der Lagrangefunktion bezüglich $\left(x_1,...,x_2;\lambda_1,...,\lambda_m\right) \ge 0$ ist.

S. 2. 20. (***Kuhn-Tucker***)
Es gelten die Bedingungen B1 – B4. Hat die Lagrangefunktion einen Sattelpunkt $\left(x_1^0,...,x_n^0;\lambda_1^0,...,\lambda_m^0\right)$, so gilt:

$$L_{x_j}\left(x_1^0,...,x_n^0;\lambda_1^0,...,\lambda_m^0\right) \ge 0, \quad j = 1,2,...,n$$

$$L_{\lambda_i}\left(x_1^0,...,x_n^0;\lambda_1^0,...,\lambda_m^0\right) \le 0, \quad i = 1,2,...,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^0 \cdot L_{x_j}\left(x_1^0,...,x_n^0;\lambda_1^0,...,\lambda_m^0\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \cdot L_{\lambda_i}\left(x_1^0, \dots, x_n^0; \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0\right) = 0 .$$

S. 2. 21.
Unter den Voraussetzungen B1 – B4 sind die Kuhn-Tucker-Bedingungen auch hinreichend dafür, dass $\left(x_1^0, \dots, x_n^0; \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0\right) \geq 0$ ein Sattelpunkt der Lagrangefunktion ist.

S. 2. 22.
Es gelten die Voraussetzungen $\left(x_1^0, \dots x_n^0\right) \geq 0$ genau dann eine Lösung des Problems der mathematischen Optimierung, wenn reelle Zahlen $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0 \geq 0$ existieren, so dass die Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt sind.

(Letzte Aktualisierung: 13.09.06)