Teil I

Analysis in der Ökonomie

<u>D. 1. 1.</u> (*Funktion*)
Es sei $f \subseteq XxY$ eine Abbildung. Die Abbildung f heißt *Funktion*, falls sie eindeutig ist.
Man schreibt dann auch:

$$f: X \to Y$$
$$f(x) = y,$$

wobei y das (eindeutig bestimmte) Bild des Urbildes x ist.
Im Falle

$$X \subseteq R^n, \qquad Y \subseteq R^1$$

spricht man von einer *reellwertigen Funktion von n reellen Variablen*.

<u>D. 1. 2.</u> (*Definitionsbereich, Wertebereich*):
Es sei $A \subseteq XxY$ eine Abbildung. Die Menge

$$D(A) := \{x \in X \mid \exists y \in Y \text{ mit } (x, y) \in A\}$$

aller Elemente aus X, zu denen ein Bild y bei der Abbildung A existiert, heißt *Definitionsbereich* (bzw. *Urbildbereich*) der Abbildung A.
Die Menge

$$W(A) := \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ mit } (x, y) \in A\}$$

aller Elemente aus Y, zu denen ein Urbild x bei der Abbildung A existiert, heißt *Wertebereich* (bzw. *Bildbereich*) der Abbildung A.

<u>B. 1. 1.</u>
Im diesem Teil werden reellwertige Funktionen <u>einer reellen Variablen</u> betrachtet. Dabei wird für solche Funktionen folgende Schreibweise gewählt:

$$f: y = f(x), \quad x \in D(f).$$

<u>BS. 1. 1.</u>
Einige ausgewählte ökonomische Funktionen:

1. (Nachfragefunktionen)
Es sei

p : Preis eines Gutes [GE/ME]
x : Nachgefragte Menge eines Gutes [ME].

i) $p(x) = 5e^{-0.2x}$

ii) $x(p) = 2\sqrt{36 - p}$.

2. (Angebotsfunktionen)
Es sei

p : Preis eines Gutes [GE/ME]
x : Angebot eines Gutes [ME].

i) $p(x) = 2\sqrt{5x + 4}$

ii) $x(p) = -50 + 8p^5$

3. (Erlösfunktionen)

i) $E(x) := x \cdot p(x) = x \cdot (10 - 1.25x)$
$= 10x - 1.25x^2$

ii) $E(p) = p \cdot x(p) = p \cdot (8 - 0.8p)$
$= 8p - 0.8p^2$

iii) (Eine diskrete Erlösfunktion)
Eine Firma erzielte in den ersten 6 Monaten eines Jahres die folgenden wertmäßigen Erlöse [T€]:

Monat	1	2	3	4	5	6
Erlös	10	12	14	13	16	12

4. (Produktionsfunktionen)
Es sei

r : Faktorinput [ME]
x : Output (Ertrag) [ME].

i) (Ertragsgesetzliche Produktionsfunktion) : $x(r) = -r^3 + 12r^2 + 60r$

ii) (Cobb-Douglas-Produktionsfunktion): $x(r) = 0.7r^{0.5}$

iii) (CES-Produktionsfunktion): $x(r) = \left(r^{-0.5} + 0.5\right)^{-2}$

iv) (Limitationale Produktionsfunktion):

$$x(r) = \begin{cases} 0.75r & \text{für} \quad r \leq 20 \\ 15 & \text{für} \quad r > 20 \end{cases}$$

5. (Gesamtkostenfunktionen)
Es sei

x: Produktionsmenge [ME].
K: Gesamtkosten [GE]
K_f: Fixkosten [GE]
K_v: Variable Kosten [GE]

$$K(x) = K_f + K_v(x)$$

i) (Ertragsgesetzliche Kostenfunktion) : $K(x) = 800 + 0.01x^3 - x^2 + 60x$
ii) (Neoklassische Produktionsfunktion): $K(x) = 2001 + 36 \cdot e^{0.01x}$
iii) (Zusammengesetzte Kostenfunktion):

$$K(x) = \begin{cases} 0.25x + 3 & \text{für} \quad 0 < x \leq 4 \\ 0.2x + 5 & \text{für} \quad 4 < x \leq 8 \\ 0.5x + 3 & \text{für} \quad 8 < x \leq 12 \\ 0.12x^2 - 2.5x + 21 & \text{für} \quad 12 < x \leq 16 \end{cases}$$

6. (Durchschnittliche-, Variable-, und Fixkostenfunktionen)

$$k(x) := \frac{K(x)}{x}, \quad x > 0, \qquad k(x) = \frac{800 + 0.01x^3 - x^2 + 60x}{x} = \frac{800}{x} + 0.01x^2 - x + 60$$

$$k_v(x) := \frac{K_v(x)}{x}, \quad x > 0, \qquad k_v(x) = \frac{0.01x^3 - x^2 + 60x}{x} = 0.01x^2 - x + 60$$

$$k_f := \frac{K_f}{x}, \quad x > 0, \qquad k_f(x) = \frac{800}{x}, \quad x > 0$$

7. (Gewinn-, Deckungsbeitragsfunktionen)

$$G(x) := E(x) - K(x), \qquad G(x) = 52.50x - \left(x^3 - 12x^2 + 60x + 98\right)$$
$$= -x^3 + 12x^2 - 7.5x - 98$$

$$G_D(x) := E(x) - K_v(x), \qquad G_D(x) = 52.50x - \left(x^3 - 12x^2 + 60x\right)$$
$$= -x^3 + 12x^2 - 7.5x$$

8. (Durchschnittsgewinn-, Deckungsbeitragsfunktionen)

$$g(x) := \frac{G(x)}{x}, \quad x > 0, \qquad g(x) = \frac{-x^3 + 12x^2 - 7.5x - 98}{x} = -x^2 + 12x - 7.5 - \frac{98}{x}$$

$$g_d(x) := \frac{G_D(x)}{x}, \quad x > 0, \qquad g_D(x) = \frac{-x^3 + 12x^2 - 7.5x}{x} = -x^2 + 12x - 7.5$$

BS. 1. 2.
Bestimmen Sie den Definitionsbereich der

1. Produktionsfunktion

$$x(r) = \sqrt{2r - 200}$$

2. „Preis-Absatz-Funktion“

$$p(x) = \frac{100}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} + 20, \quad (p: \text{Preis [GE]}; \; x: \text{Menge [GE]})$$

3. Funktion

$$A(Y) = 200 \cdot \ln(Y + 100) - 750,$$

(A : Monatliche Ausgaben für Energie [€]; Y : Monatliches Haushaltseinkommen [€])

Lösung:
1. $r \geq 100$
2. $x > 0$
3. $Y > 0$.

D. 1. 3. (*Inverse Funktion* bzw. *Umkehrfunktion*)
Ist die Umkehrabbildung f^{-1} einer Funktion

$$f: \; y = f(x), \quad x \in D(f)$$

selbst eine Funktion, so wird f^{-1} *Umkehrfunktion* (oder auch *inverse Funktion*) von f genannt.

B. 1. 2.
Es gilt

$$D(f) = W(f^{-1}); \qquad W(f) = D(f^{-1}).$$

BS 1. 3.
Ermitteln Sie die Umkehrfunktion für die Nachfragefunktion

$$f: \; p = 10 - \frac{1}{2}x, \quad x \in [0, 20]$$

mit

x: Nachfrage; p: Preis.

Lösung:

$$f^{-1}:\ x = 20 - 2p, \quad p \in [0,\ 10],$$

$$D\left(f^{-1}\right) = W(f) = [0,\ 10].$$

<u>D. 1. 4.</u> (*Beschränktheit*)
Eine Funktion

$$f:\ y = f(x), \quad x \in D\left(f\right)$$

heißt auf der Menge $M \subseteq D\left(f\right)$ *beschränkt,* wenn es eine endliche Konstante C derart gibt, dass

$$\left|f(x)\right| \le C, \quad \forall x \in M$$

gilt. Dabei wird C eine *Schranke* von f auf M genannt.

<u>D. 1. 5.</u> (*Beschränktheit nach unten bzw. nach oben*)
Eine Funktion

$$f:\ y = f(x), \quad x \in D\left(f\right)$$

heißt auf der Menge $M \subseteq D\left(f\right)$ *nach unten* bzw. *nach oben beschränkt,* wenn es eine endliche Konstante C_1 bzw. C_2 derart gibt, dass

$$C_1 \le \left|f(x)\right|, \quad \forall x \in M$$

bzw.

$$\left|f(x)\right| \le C_2, \quad \forall x \in M$$

gilt. Dabei werden C_1 bzw. C_2 *untere* bzw. *obere Schranke* von f auf M genannt.

<u>S. 1. 1.</u>
Für die Beschränktheit einer Funktion f auf $M \subseteq D(f)$ ist notwendig und hinreichend, dass f auf M sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Beweis:
Die Notwendigkeit folgt unmittelbar aus

$$-C \le f(x) \le C.$$

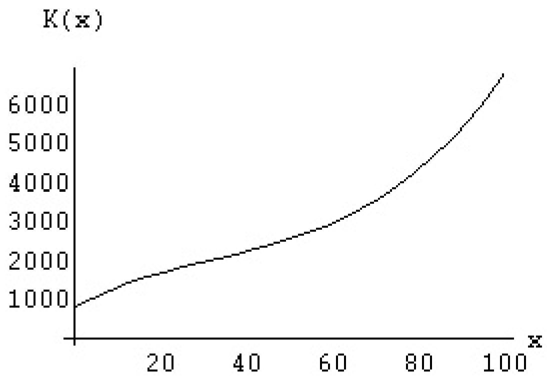
Umgekehrt ergibt sich die Beschränktheit aus D.1.5., wenn

$$C := \max\left(\left|C_1\right|, \left|C_2\right|\right)$$

gesetzt wird.

BS. 1. 4.
Die ertragsgesetzliche Kostenfunktion

$$K(x) = 0.01x^3 - x^2 + 60x + 800, \quad x \in [0,\ 100]$$



ist beschränkt. Es gilt nämlich:

$$800 \le K(x) \le 6088\,.$$

D. 1. 6. (*Monotonie)*
Eine Funktion

$$f:\ y = f(x), \quad x \in D(f)$$

heißt in dem Intervall $I \subseteq D(f)$ *monoton wachsend*, wenn

$$f(x_1) \le f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in I \text{ mit } x_1 < x_2$$

gilt; entsprechend wird sie *monoton fallend in* I genannt, wenn

$$f(x_1) \ge f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in I \text{ mit } x_1 < x_2$$

gilt.
Treten in den obigen Ungleichungen die Gleichheitszeichen auf, so wird f entsprechend *streng monoton wachsend* bzw. *streng monoton fallend* in I genannt.

S. 1. 2.
1.
Wenn f_1 und f_2 im gleichen Intervall I streng monoton wachsend sind, dann ist die Summe $f_1 + f_2$ der beiden Funktionen sowie das Produkt $a \cdot f_i,\ i = 1,\ 2,$ für $a > 0$ in I ebenfalls streng monoton wachsend; dagegen ist $a \cdot f_i,\ i = 1,\ 2,$ für $a < 0$ in I streng monoton fallend.

2.
Wenn f in I streng monoton ist, dann existiert die inverse Funktion f^{-1}.
(Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht!)

3.
Wenn f in I streng monoton wachsend ist, so ist f^{-1} mit

$$D(f^{-1}) = \left\{ x \mid x \in R^1 \wedge x = f(u),\ u \in I \right\}$$

in jedem Intervall $I^{-1} \subseteq D(f^{-1})$ ebenfalls streng monoton wachsend.
Analoges gilt für streng monoton fallende Funktionen.

Beweis:
Wir beschränken uns auf den Beweis der 1. Behauptung:
Sei $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ beliebig. Aus den Voraussetzungen über f_1 und f_2 folgt dann:

$$f_1(x_1) < f_1(x_2)\,,$$

$$f_2(x_1) < f_2(x_2)\,,$$

d. h.

$$f_1(x_1) + f_2(x_1) < f_1(x_2) + f_2(x_2)$$

bzw.

$$a \cdot f_i(x_1) > a \cdot f_i(x_2) \quad \text{mit} \quad a < 0\,.$$

<u>D. 1. 7.</u> (*Konvexität und Konkavität*)
Eine Funktion $y = f(x),\ x \in D(f)$, heißt im Intervall $I \subseteq D(f)$, *konvex*, wenn

$$f\left(\boldsymbol{a}x_1 + (1-\boldsymbol{a})x_2\right) \le \boldsymbol{a} f(x_1) + (1-\boldsymbol{a})\, f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in I; \quad \forall \boldsymbol{a} \in [0,\, 1]$$

gilt.
Entsprechend wird sie in I konkav genannt, wenn

$$f\left(\boldsymbol{a}x_1 + (1-\boldsymbol{a})x_2\right) \ge \boldsymbol{a} f(x_1) + (1-\boldsymbol{a})\, f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in I; \quad \forall \boldsymbol{a} \in [0,\, 1]$$

gilt.

<u>B. 1. 3.</u>
Der Nachweis der Konvexität für stetige Funktionen lässt sich vereinfachen; für sie genügt es nämlich zu zeigen, dass die obige Ungleichung für $\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}$ erfüllt ist.

<u>D. 1. 8.</u> (*Gerade und ungerade Funktionen*)
Eine Funktion $y = f(x),\ x \in D(f)$ heißt *gerade*, wenn

$$D(f) = [-a,\ a]\,, \quad a > 0 \qquad (\text{bzw. } D(f) =]a,\ a[\,)$$

gilt und

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in D(f),\, x > 0\,;$$

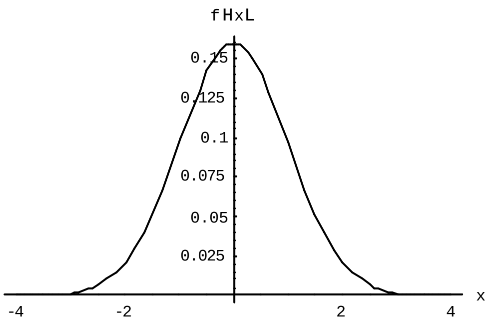
entsprechend heißt sie *ungerade*, wenn statt

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in D(f),\, x > 0$$

gilt.

BS. 1. 5.
Die Dichtefunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in R^1.$$



ist eine gerade Funktion, denn es gilt:

$$\varphi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x), \qquad \forall x \in R^1$$

D. 1. 9. (*Verkettete Funktion*)
Es seien

$$f: \quad y = f(u),\, u \in D(f)$$

$$g: \quad \mathrm{u} = g(x),\, x \in D(g)\,.$$

Dabei gelte $W(g) \subseteq D(f)$. Dann heiß die Funktion

$$y = f(g(x)), \quad x \in D(g)$$

mittelbare Funktion oder Verkettung der Funktionen f und g.

<u>BS. 1. 6.</u>
Die Abhängigkeit der in einer Periode abgesetzten Menge x eines Produktes vom Preis p sei durch die Funktion

$$x(p) = 3900 - 30p - p^2, \qquad 0 \le p \le 45$$

gegeben. Die Gesamtkosten $K(x)$ für die Produktion der abgesetzten Menge x möge durch

$$K(x) = 2000 + 30x$$

gegeben sein.
Zu ermitteln sei die Kostenfunktion in Abhängigkeit vom Preis.

Lösung:

$$\begin{aligned} K(p) &= 2000 + 30x \\ &= 2000 + 30(3900 - 30p - p^2) \end{aligned}$$

$$K(p) = 119000 - 900p - 30p^2, \quad 0 \le p \le 45 .$$

<u>D. 1. 10.</u> (*$\boldsymbol{e}-\boldsymbol{d}-$Charakterisierung des Grenzwertes*)
Sei f sei (mindestens) in einer Umgebung der Stelle x_0 definiert. Eine Zahl g heißt *Grenzwert* von f für x gegen x_0, in Zeichen

$$\left\langle \lim_{x \to x_0} f(x) = g \right\rangle, \text{ wenn} \left\langle \forall \boldsymbol{e} > 0 \;\; \exists \boldsymbol{d} > 0: \;\; \left(0 < |x - x_0| < \boldsymbol{d}\right) \;\Rightarrow\; |f(x) - g| < \boldsymbol{e} \right\rangle.$$

<u>B. 1. 4.</u> (*Geometrische Interpretation*)
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$ bedeutet geometrisch:
Zu jedem (noch so kleinen) „$\boldsymbol{e}-$Streifen“ um $y = g$ existiert ein „$\boldsymbol{d}-$Streifen“ um $x = x_0$, so dass alle Punkte der Bildkurve von f, die in diesem „$\boldsymbol{d}-$Streifen“ liegen (außer der Mittellinie $x = x_0$), auch dem vorgegebenen „$\boldsymbol{e}-$Streifen“ angehören. Dabei ist $\boldsymbol{d}$ offenbar im Allgemeinen umso kleiner zu wählen, je kleiner $\boldsymbol{e}$ vorgegeben ist, was in der Schreibweise $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{e})$ zum Ausdruck kommen soll.

<u>D. 1. 11.</u> (*Einseitige Grenzwerte*)
Die Funktion f sei (mindestens) in einem Intervall $]x_0,\, x_0 + \boldsymbol{d}[,\ \boldsymbol{d} > 0$, definiert. Eine Zahl g_r heißt *rechtseitiger Grenzwert* von f für x gegen x_0, in Zeichen

$$\left\langle \lim_{x \to x_0^+} f(x) = g_r \right\rangle, \text{ wenn } \left\langle \forall \boldsymbol{e} > 0 \;\; \exists \boldsymbol{d} > 0: \;\; \left(x_0 < x < x_0 + \boldsymbol{d}\right) \;\Rightarrow\; |f(x) - g_r| < \boldsymbol{e} \right\rangle.$$

Die Funktion f sei (mindestens) in einem Intervall $]x_0 - \boldsymbol{d},\, x_0[,\ \boldsymbol{d} > 0$, definiert. Eine Zahl g_l heißt *linksseitiger Grenzwert* von f für x gegen x_0, in Zeichen

$$\left\langle \lim_{x\to x_0^-} f(x) = g_l \right\rangle, \text{ wenn} \left\langle \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \;\; (x_0 - \delta < x < x_0) \;\Rightarrow\; |f(x) - g_l| < \varepsilon \right\rangle.$$

S. 1. 3.

Die Funktion f hat genau dann für x gegen x_0 einen Grenzwert, wenn die einseitigen Grenzwerte von f für x gegen x_0 existieren und übereinstimmen. In diesem Falle gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

BS. 1. 7.

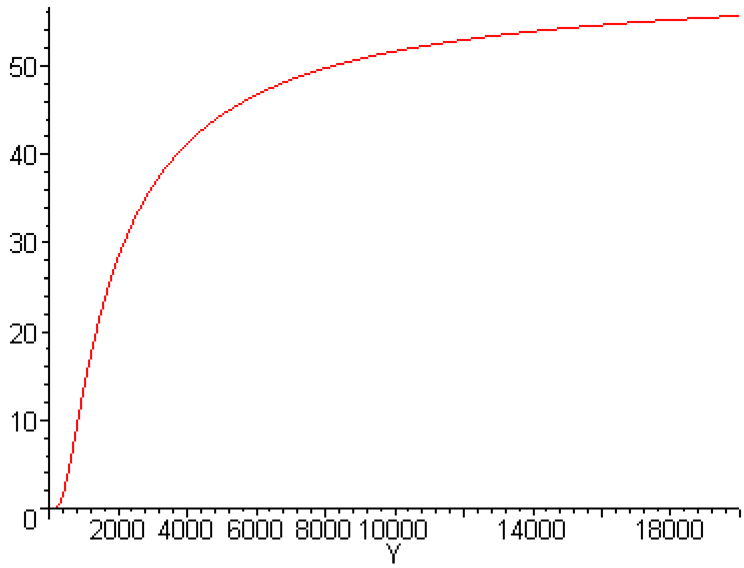
Der monatliche Butteverbrauch B [€/Monat] eines Haushaltes hänge vom Haushaltseinkommen Y [€/Monat] in folgender Weise ab:

$$B(Y) = 60 \cdot e^{-\frac{1500}{Y}}, \quad Y > 0.$$

Wie verhält sich der Butterverbrauch, wenn das Einkommen gegen Null geht?

Lösung:

$$\lim_{Y\to 0^+} B(Y) = \lim_{Y\to 0^+} 60 \cdot e^{-\frac{1500}{Y}} = 60 \cdot \lim_{Y\to 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1500}{Y}}} = 60 \cdot 0 = 0.$$



D. 1. 12. (***Unendliche Grenzwerte***)

1.

$$\left\langle \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty \right\rangle, \text{ wenn } \left\langle \forall n \in N \;\; \exists \boldsymbol{d} > 0: \;\; (x_0 - \boldsymbol{d} < x < x_0) \;\Rightarrow\; f(x) > n \right\rangle.$$

2.

$$\left\langle \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \right\rangle, \text{ wenn } \left\langle \forall n \in Z \setminus (N \cup \{0\}) \;\; \exists \boldsymbol{d} > 0: \;\; (x_0 - \boldsymbol{d} < x < x_0) \;\Rightarrow\; f(x) < n \right\rangle.$$

3.

$$\left\langle \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \right\rangle, \text{ wenn} \left\langle \forall n \in N \;\; \exists \boldsymbol{d} > 0: \;\; (x_0 < x < x_0 + \boldsymbol{d}) \;\Rightarrow\; f(x) > n \right\rangle.$$

4.

$$\left\langle \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \right\rangle, \text{wenn} \left\langle \forall n \in Z \setminus (N \cup \{0\}) \;\; \exists \boldsymbol{d} > 0: \;\; (x_0 < x < x_0 + \boldsymbol{d}) \;\Rightarrow\; f(x) < n \right\rangle$$

.

5.

$$\left\langle \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \right\rangle, \text{ wenn } \left\langle \forall n \in N \;\; \exists \boldsymbol{d} > 0: \; 0 < |x - x_0| < \boldsymbol{d} \;\Rightarrow\; f(x) > n \right\rangle.$$

6.

$$\left\langle \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \right\rangle, \text{ wenn } Z \setminus (N \cup \{0\}) \;\; \exists \boldsymbol{d} > 0: \;\; (0 < |x - x_0| < \boldsymbol{d}) \;\Rightarrow\; f(x) < n \right\rangle.$$

D. 1. 13. (***Grenzwert im Unendlichen***)

1.

$$\left\langle \lim_{x \to \infty} f(x) = g \right\rangle, \text{ wenn } \left\langle \forall \boldsymbol{e} > 0 \;\; \exists n \in N: \; x > n \;\Rightarrow\; |f(x) - g| < \boldsymbol{e} \right\rangle.$$

2.

$$\left\langle \lim_{x \to -\infty} f(x) = g \right\rangle, \text{ wenn } Z \setminus (N \cup \{0\}) \;\; \exists \boldsymbol{d} > 0: \;\; x < n \Rightarrow \; |f(x) - g| < \boldsymbol{e} \right\rangle.$$

BS. 1. 8.

Gegeben sei der im Beispiel BS. 1. 7. beschriebenen Sachverhalt. Gesucht ist der Sättigungswert des Butterverbrauchs für unbeschränkt wachsendes Einkommen.

Lösung:

$$\lim_{Y \to \infty} B(Y) = \lim_{Y \to \infty} 60 \cdot e^{-\frac{1500}{Y}} = 60 \cdot e^0 = 60 \cdot 1 = 60$$

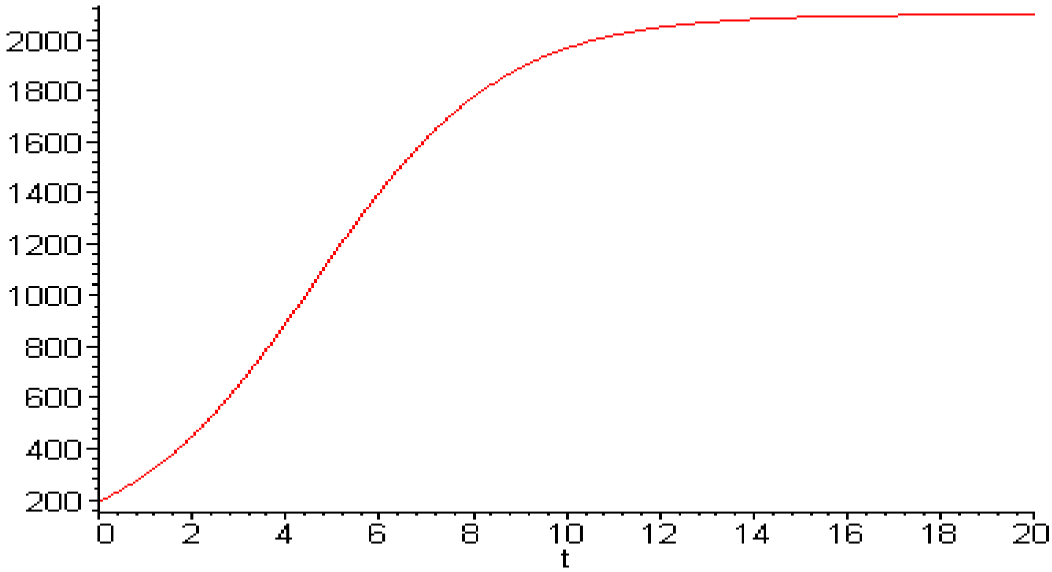
BS. 1. 9.
Für das Gesamteinkommen Y [GE/Jahr] eines expandierenden Wirtschaftszweiges wird – ausgehend vom Zeitpunkt t_0 - im Zeitablauf eine Entwicklung prognostiziert, die gemäß folgender Funktion verläuft:

$$Y(t) = \frac{210}{0.1 + 20 \cdot e^{-0.5t}}, \quad t: \text{ Zeitdauer [Jahre].}$$

Gesucht ist der „Sättigungswert“ des Einkommens in „weiter“ Zukunft.

Lösung:

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{210}{0.1 + 20 \cdot e^{-0.5t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{210}{0.1 + \frac{20}{e^{0.5t}}} = \frac{210}{0.1} = 2100 \text{ [GE/Jahr].}$$



D. 1. 13 (***Stetigkeit an einer Stelle***)
Eine in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion f heiß *an der Stelle* x_0 *stetig*, wenn gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

B. 1. 5.
Führt man durch die Substitution

$$x = x_0 + h$$

die neue Variable h ein, so kann man für die obige Beziehung offenbar auch schreiben

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

B. 1. 6.
Unter Beachtung der Definition des Grenzwertes einer Funktion erhält man die folgende ausführliche Formulierung von D. 1. 13.

D. 1. 14.
Eine in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion f heißt *an der Stelle x_0 stetig*, wenn für jede Folge $\{x_n\}$ in $D(f)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

B. 1. 7.
Eine „$\boldsymbol{e}-\boldsymbol{d}-$“-Charakterisierung des Grenzwertes einer Funktion liefert eine entsprechende Charakterisierung der Stetigkeit.

S. 1. 4.
Die Funktion f sei in einer Umgebung von x_0 definiert.
f ist an der Stelle x_0 genau dann stetig, wenn zu jeder (insbesondere jeder beliebig kleinen) Zahl $\boldsymbol{e} > 0$ eine Zahl $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{e}) > 0$ existiert, so dass gilt

$$|f(x) - f(x_0)| < \boldsymbol{e}$$

für alle x mit

$$|x - x_0)| < \boldsymbol{d}.$$

D. 1. 15. ***(Einseitige Stetigkeit)***
Eine (mindestens) in einem Intervall $[x_0,\ x_0 + \boldsymbol{d}],\ \boldsymbol{d} > 0$, definierte Funktion f heißt *an der Stelle x_0 rechtsseitig stetig*, wenn gilt

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Für Funktionen, die in einem Intervall $[x_0 - \boldsymbol{d},\ x_0],\ \boldsymbol{d} > 0$, erklärt sind, ist entsprechend die *linksseitige Stetigkeit an der Stelle x_0* durch die Forderung

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

definiert.

S. 1. 5.
Eine in einer Umgebung von x_0 definierter Funktion ist genau dann an der Stelle x_0 stetig, wenn sie dort sowohl linksseitig als auch rechtsseitig stetig ist.

D. 1. 16. (***Stetigkeit in einem Intervall***)
Eine auf einem Intervall I definierte Funktion f heißt *auf I stetig*, wenn gilt:

1. f ist in jedem inneren Punkt von I stetig.
2. Ist der linke (bzw. rechte) Randpunkt von I ein Element von I, dann ist f dort rechtsseitig (bzw. linksseitig) stetig.

B. 1. 8. (***Unendlichkeitsstellen und ihre Klassifikation***)
Aus der Definition der Stetigkeit ergibt sich, dass für jede Unstetigkeitsstelle x_0 von f genau einer der folgenden fünf Fälle vorliegt:

Fall 1 (*Hebbare Unstetigkeit*)
Der Grenzwert

$$g = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

existiert, ist aber von $f(x_0)$ verschieden, sofern f an der Stelle x_0 überhaupt definiert ist.

Fall 2 (*Endliche Sprungstelle*)
Die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ existieren, sind aber voneinander verschieden.
In diesem Falle heißt x_0 *Sprungstelle von f mit endlichem Sprung*.

Fall 3 (*Unendlichkeitsstelle von f*)
Es gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ oder $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$. In diesem Falle nennt man x_0 *Unendlichkeitsstelle von f*.

Fall 4 (*Sprungstelle von f mit unendlichem Sprung*)
Die Funktion f ist für eine der beiden „Bewegungen“ $x \to x_0^-$, $x \to x_0^+$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) und für die andere „Bewegung“ konvergent oder bestimmt divergent gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$). In diesem Falle heißt x_0 *Sprungstelle von f mit unendlichem Sprung*.

Fall 5 (*Oszillatorische Unstetigkeit*)
Die Funktion f ist für mindestens eine der beiden „Bewegungen“ $x \to x_0^-$, $x \to x_0^+$ unbestimmt divergent. In diesem Falle heißt *oszillatorische Unstetigkeit von f*.

BS. 1. 10.
Die monatlichen Gebühren für einen Telefonanschluß setzen sich zusammen aus den festen Grundgebühren von 27 € und den variablen Grundgebühren von 0.23 € pro Zeiteinheit. Die monatlich zu zahlenden Beträge y hängen also von der Zeit x ab, die „vertelefoniert“ werden. Stellen Sie die entsprechende Funktion analytisch auf.

Lösung:

$$f(x) = \begin{cases} 27 & \text{für} \quad x = 0 \\ 27 + 0.23n & \text{für} \quad n-1 < x \le n, \quad n \in N \end{cases}$$

<u>Übung</u>: Stellen Sie die Funktion graphisch dar.

<u>BS. 1. 11.</u>
Eine Unternehmung bietet eine Ware zu einem Grundpreis von 100 [€/ME] für alle Bestellmengen bis einschließlich 1000 [ME] an. Für jede darüber hinaus bestellte Mengeneinheit bis incl. 2000 [ME] wird ein Rabatt von 40% , für jede über 2000 [ME] hinaus bestellte Mengeneinheit wird ein Rabatt von 70% auf den Grundpreis gewährt.
Stellen Sie den Bestellwert W [€] in Abhängigkeit von der Liefermenge x [ME] dar.

Lösung:

$$W(x) = \begin{cases} 100x & \text{für} \quad 0 \le x \le 1000 \\ 60 \cdot (x - 1000) + 100000 & \text{für} \quad 1000 < x \le 2000 \\ 30 \cdot (x - 2000) + 160000 & \text{für} \quad 2000 < x \end{cases}$$

d.h.

$$W(x) = \begin{cases} 100x & \text{für} \quad 0 \le x \le 1000 \\ 60x + 40000 & \text{für} \quad 1000 < x \le 2000 \\ 30x + 100000 & \text{für} \quad 2000 < x \end{cases}.$$

<u>Übung</u>: Stellen Sie die Funktion graphisch dar.

<u>S. 1. 6</u>
Ist die Funktion f an der Stelle x_0 stetig und $f(x_0) > 0$ (bzw. $f(x_0) > 0$), dann gibt es eine Umgebung von x_0, so dass auch noch für alle x aus dieser Umgebung $f(x_0) > 0$ (bzw. $f(x_0) > 0$) gilt.

<u>S. 1. 7</u>
Die Funktionen f und g seien an der Stelle x_0 stetig. Dann sind die Funktionen

$$f + g; \qquad c \cdot f \quad (c\text{: eine Konstante}); \qquad f \cdot g$$

an der Stelle x_0 stetig.
Ist ferner $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch die Funktion

$$\frac{f}{g}$$

an der Stelle x_0 stetig.

<u>S. 1. 8</u>
Ist die Funktion $g(x)$ an der Stelle $x = x_0$ stetig und die Funktion $f(z)$ an der Stelle $z = g(x_0)$ stetig, dann ist die mittelbare Funktion $f(g(x))$ an der Stelle $x = x_0$ stetig.

S. 1. 9.
Jede Elementarfunktion ist auf ihrem Definitionsbereich stetig.
(Eine Elementarfunktion ist eine Funktion, die sich aus den Grundfunktionen durch Anwendung der rationalen Grundoperationen und Bildung mittelbarer Funktionen in endlich vielen Schritten erzeugen lässt.)

S .1. 10.
Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion ist dort beschränkt.

D. 1. 17. (*Absolute Extrema*)
Die Funktion f sei auf dem Intervall I definiert, und es sei $x_0 \in I$. Der Funktionswert $f(x_0)$ heißt *absolutes Maximum* (bzw. *Minimum*) *von* f *auf* I, wenn gilt:

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in I$$

$$(\text{bzw.} \qquad f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in I).$$

Absolute Maxima und Minima gemeinsam nennt man *absolute* Extrema.

S. 1. 11 (*Weierstraß*)
Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion hat dort ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum.

S. 1. 12. (*Bolzano*)
Ist die Funktion f auf $[a, b]$ stetig und haben die Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ entgegenbesetze Vorzeichen, dann gibt es (mindesten) ein $x \in]a, b[$ mit $f(x) = 0$.

S. 1. 13.
Die Funktion f sei auf dem Intervall I stetig. Dann ist ihr Wertevorrat $\{ f(x) \mid x \in I \}$ ebenfalls ein Intervall.

S. 1. 14.
Die Funktion f sei auf einem Intervall eineindeutig und stetig. Dann ist ihre Umkehrfunktion f^{-1} auf dem Wertevorrat von f, der ebenfalls ein Intervall ist, stetig.

D. 1. 18 (*Differenzierbarkeit an einer Stelle*)
Die in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion f heißt *an der Stelle* x_0 *differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.
Dieser Grenzwert heißt *1. Ableitung* oder *Ableitung 1. Ordnung der Funktion* f *an der Stelle* x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet, also

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Mit Δx statt h kann man für die obige Formel auch

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

schreiben.
Eine weitere Schreibweise erhält man mit $x = x_0 + h$, also $x \to x_0$ statt $h \to 0$:

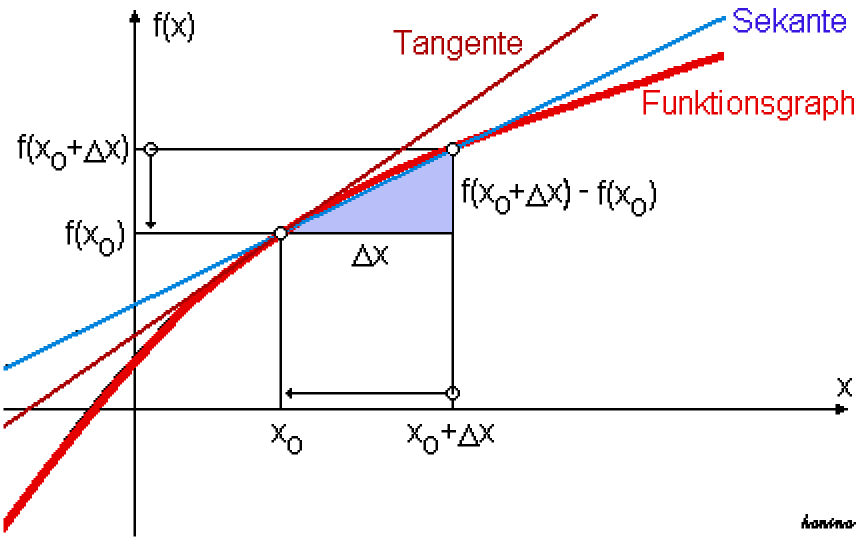
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Für die 1. Ableitung $f'(x_0)$ sind auch die Symbole

$$y'\big|_{x=x_0}, \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}, \qquad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

und die Bezeichnung *Differentialquotient 1. Ordnung von* f *an der Stelle* x_0 üblich.
Die Berechnung der Ableitung einer Funktion nennt man *Differentiation*.

<u>B. 1. 9.</u> (*Geometrische Deutung der 1. Ableitung*)



<u>BS. 1. 12.</u>
Gegeben sei die Erlösfunktion

$$E(x) = 150x - 0.5x^2.$$

Berechne die Ableitung der Funktion an der Stelle $x_0 = 2$.

Lösung:

$$E'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{E(2+h)-E(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[150\cdot(2+h)-0.5\cdot(2+h)^2\right]-\left[150\cdot 2-0.5\cdot 2^2\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{148h-h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(148-h)=148\,.$$

<u>D. 1. 19.</u> (*Einseitige Differenzierbarkeit*)
Eine (mindestens) in einem Intervall $[x_0,\ x_0+c]$, $c>0$, definierte Funktion f heißt *an der Stelle* x_0 *rechtsseitig differenzierbar*, wenn der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt *rechtseitige Ableitung von* f *an der Stelle* x_0 und wird mit f_r' bezeichnet.
Analog ist die *linksseitige Ableitung von* f *an der Stelle* x_0 definiert:

$$f_l'(x_0):=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,.$$

<u>S. 1. 15.</u>
Die Funktion $f(x)$ ist genau dann an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn sie dort sowohl rechtsseitig als auch linksseitig differenzierbar ist und

$$f_r'(x_0)=f_l'(x_0)$$

gilt. In diesem Falle ist

$$f'(x_0)=f_r'(x_0)=f_l'(x_0)\,.$$

<u>D. 1. 20.</u> (*Differenzierbarkeit in einem Intervall*)
Eine auf einem Intervall I definierte Funktion f heißt *auf* I *differenzierbar*, wenn gilt:

1. f ist in jedem inneren Punkte von I differenzierbar.
2. Ist der linke (bzw. rechte) Randpunkt von I ein Element von I, dann ist f dort rechtsseitig (bzw. linksseitig) differenzierbar.

S. 1. 16.
Eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion ist auch dort stetig.

S. 1. 17.
Die Funktionen f und g seien an der Stelle x_0 differenzierbar. Dann sind auch die Funktionen $f+g$, $c\cdot f$ (c ist eine Konstante) und $f\cdot g$ an der Stelle x_0 differenzierbar, und es gilt dort:

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(c\cdot f)' = c\cdot f'$$

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \quad (\textit{Produktregel}).$$

Ist ferner $g(x_0)\neq 0$, dann ist auch die Funktion $\frac{f}{g}$ an der Stelle x_0 differenzierbar, und es gilt dort:

$$(f/g)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2} \quad (\textit{Quotientenregel}).$$

S. 1. 18.(*Kettenregel*)
Ist die Funktion $g(x)$ an der Stelle $x = x_0$ und die Funktion $f(z)$ an der Stelle $z = g(x_0)$ differenzierbar, dann ist die mittelbare Funktion

$$F(x) = f(g(x))$$

an der Stelle $x = x_0$ differenzierbar, und es gilt die sog. *Kettenregel*:

$$F'(x) = f'(z_0)\cdot g'(x_0)$$

mit

$$z_0 = g(x_0).$$

B. 1. 10.
1.
Setzt man

$$y = f(z), \quad z = g(x),$$

dann ist

$$y = f(g(z)) = F(x),$$

und man kann die Kettenregel in der folgenden einprägsamen Form schreiben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

2.
Die Kettenregel lässt sich auf den Fall ausdehnen, dass n Funktionen „ineinander geschachtelt“ sind.

BS. 1. 13.
Eine Ein-Produkt-Unternehmung produziert ihren Output x [ME] zu folgenden Gesamtkosten K [GE]:

$$K(x) = 200 \cdot e^{0.01x+400}, \quad x \geq 0.$$

Ermitteln Sie die Grenzkostenfunktion.

Lösung:

$$z = 0.01x + 400, \qquad \frac{dz}{dx} = 0.01$$

$$K(x) = 200 \cdot e^{z}, \qquad \frac{dK}{dz} = 200 \cdot e^{z}$$

$$K'(x) = \frac{dK(x)}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dK(x)}{dz} = 0.01 \cdot 200 \cdot e^{z} = 2e^{0.01x+400}.$$

S. 1. 19. (*Ableitung der Umkehrfunktion*)
Die Funktion f sei eineindeutig und in einer Umgebung der Stelle x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$.
Dann ist ihre Umkehrfunktion f^{-1} an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{mit} \quad y_0 = f(x_0).$$

BS. 1. 14.
Gegeben sei die Nachfragefunktion

$x(p) = 120 - 0.4p$ (x: Nachfrage [ME], p: Preis [GE/ME]).

Ermitteln Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $x^{-1}(p)$.

Lösung:

$$x^{-1}(p) = \frac{1}{x'(p)} = \frac{1}{-0.4} = -2.5.$$

D. 1. 21. (*Ableitungen höherer Ordnung*)
Man nennt

$$\left.\frac{df'(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Ableitung 2. Ordnung (oder *2. Ableitung*) *der Funktion* f *an der Stelle* x_0 und schreibt dafür

$$f''(x_0) \quad \text{oder} \quad y''\big|_{x=x_0} \quad \text{oder} \quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}.$$

Allgemein definiert man für eine beliebige natürliche Zahl $n>1$ *die Ableitung* $n-$*ter Ordnung* (oder $n-$*ter Ableitung*) *von* f *an der Stelle* x_0 rekursiv durch die Vorschrift:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

(Es ist zweckmäßig, $f(x)$ selbst als *Ableitung null-ter Ordnung* zu bezeichnen, also

$$f^{(0)}(x) := f(x).$$

Eine Funktion f heißt *auf einem Intervall* I $n-$*mal (stetig) differenzierbar*, wenn die Ableitung $f^{(n)}$ auf I existiert (und stetig ist).
(Natürlich existieren dann erst recht die Ableitungen f', f'', . . ., $f^{(n-1)}$ auf I .)

<u>BS. 1. 15.</u>
Gegeben seien die Durchschnittskosten k [GE]in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge x [GE]:

$$k(x) = 8400 + 10^{-4}(1008000x - 3060x^2 + 3x^3)$$

Ermitteln Sie $k''(x)$.

Lösung:

$$k'(x) = 10^{-4}(1008000 - 6120x + 9x^2),$$
$$k''(x) = 10^{-4}(-6120x + 18x).$$

<u>D. 1. 22.</u> (*Elastizitätsfunktion*)
Gegeben sei eine auf $D(f)$ stetig differenzierbare Funktion f . Als *Elastizitätsfunktion* bezeichnet man

$$e_{f,x}(x) := \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x).$$

<u>B. 1. 11.</u>
1. Der Zahlenwert der Elastizität $e_{f,x}$ von f bezüglich x gibt näherungsweise an, um wie viel Prozent sich die abhängige Variable f ändert, wenn sich die unabhängige Variable um 1% ändert.

2. Eine positive Elastizität bedeutet, dass sich die abhängige und die unabhängige Variable in gleiche Richtung bewegen; dagegen bedeutet eine negative Elastizität, dass sich die

abhängige und die unabhängige Variable in entgegengesetzte Richtung bewegen.

3. Man unterscheidet folgende Fälle:

$|\boldsymbol{e}_{f,x}| < 1$: f ist *unelastisch,*

$|\boldsymbol{e}_{f,x}| > 1$: f ist *elastisch,*

$|\boldsymbol{e}_{f,x}| = 1$: f ist *proportional elastisch,*

$|\boldsymbol{e}_{f,x}| \to \infty$: f ist *vollkommen elastisch,*

$\boldsymbol{e}_{f,x} \equiv 0$ f ist *vollkommen unelastisch.*

4. Gegeben sei die Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$ und deren Inverse f^{-1} mit der Funktionsgleichung $x = g(y)$. Dann gilt:

$$\boldsymbol{e}_{y,x} \cdot \boldsymbol{e}_{x,y} = 1\,.$$

<u>BS. 1. 16.</u>
Gegeben sei die Erlösfunktion

$$E(x) = 300x - 2.5x^2\,.$$

Ermitteln Sie die entsprechende Elastizitätsfunktion und berechnen und interpretieren Sie deren Wert für $x = 10$.

Lösung:

$$\boldsymbol{e}_{E,x}(x) = \frac{x}{300x - 2.5x^2} \cdot (300 - 5x)\,,$$

$$\boldsymbol{e}_{E,x}(10) \approx 0.91\,.$$

Erhöht sich die Nachfrage um 1%, so erhöht sich der Erlös um etwa 0.91%. Damit ist die Erlösfunktion an der Stelle $x = 10$ unelastisch.

<u>D. 1. 23.</u> (*Differential*)
Die Funktion f sei an der Stelle x differenzierbar. Das Produkt $f'(x) \cdot h$ heißt das zu der Stelle x und dem Argumentzuwachs h gehörige *Differential* (*1. Ordnung*) *von f* und wird mit $df(x)$ oder dy bezeichnet, also

$$df(x) := f'(x) \cdot h$$

oder

$$dy := f'(x) \cdot h\,.$$

<u>BS. 1. 17.</u>
Gegeben sei die Gesamtkostenfunktion K [GE] einer Ein-Produkt-Unternehmung in Abhängigkeit von deren Output x [ME] mit

$$K(x) = 0.06x^3 - 2x^2 + 60x + 200$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Differentials dK die näherungsweise Änderung der Kosten, wenn der Output von 10 ME auf 12 ME erhöht wird.

Lösung:

$$dK(x) = K'(x) \cdot dx_{|x=10,\, dx=2} = \left(0.18x^2 - 4x + 60\right) \cdot dx_{|x=10,\, dx=2} = 76 \text{ [GE]}$$

B. 1. 12.

Die Funktion $g(x) = x$ hat das Differential

$$dx = (x)' \cdot h = h.$$

Wegen der obigen Beziehung identifiziert man den Argumentzuwachs h einer beliebigen Funktion f mit dem Differential dx der speziellen Funktion g. Man schreibt also auch

$$df(x) = f'(x) \cdot dx$$

oder

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Dabei ist nun dx eine (von x unabhängige) Variable, die beliebige Werte annehmen kann und auch *Differential der unabhängigen Variablen* genannt wird.
Unter der Voraussetzung $dx \neq 0$ kann man z. B. die letzte Beziehung durch dx dividieren und erhält

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Damit gewinnt die in D. 1. 18. zunächst nur als symbolische Schreibweise für die Ableitung $f'(x)$ eingeführte Bezeichnung $\frac{dy}{dx}$ eine neue Bedeutung. Damit ist $f'(x)$ der *Quotient der Differentiale* dy und dx. Deshalb sagt man statt Ableitung auch *Differentialquotient*.

D. 1. 24. (*Differential n-ter Ordnung*)

Als das *Differential n-ter Ordnung* $(n \geq 2)$ eine $n-$mal differenzierbaren Funktion versteht man

$$d^n y := f^{(n)}(x) \cdot dx^n$$

oder

$$d^n f(x) := f^{(n)}(x) \cdot dx^n.$$

S. 1. 20.

Die Funktion f sei auf dem Intervall I stetig und auf $\operatorname{int} I$ differenzierbar.

Genau dann ist f auf I monoton $\left\{\begin{matrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{matrix}\right\}$, wenn gilt: $\left\{\begin{matrix} f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{matrix}\right\}$, $\forall x \in \operatorname{int} I$.

S. 1. 21.
Die Funktion f sei auf dem Intervall I stetig und auf $\operatorname{int} I$ differenzierbar.

Gilt $\begin{Bmatrix} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{Bmatrix}$, $\forall x \in \operatorname{int} I$, dann ist f auf I streng monoton$\begin{Bmatrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{Bmatrix}$.

BS. 1. 18.
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Produktionsfunktion

$$x(r) = -0.1r^3 + 6r^2 + 150r$$

mit

r : Input [ME]
x : Output [ME].

Lösung:

$$x'(r) = -0.3r^2 + 12r + 150$$

$$x'(r) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(r-50)\cdot(r+10) < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < r < 50.$$

Damit ist die Produktionsfunktion streng monoton wachsend für $0 < r < 50$; sie ist streng monoton fallend für $r > 50$:

D. 1. 25. (***Absolutes Minimum und Maximum***)
Die Funktion f sei in $D(f)$ definiert. Der Funktionswert $F(x_0)$ heißt *absolutes*

$$\begin{Bmatrix} \textit{Maximum} \\ \textit{Minimum} \end{Bmatrix} \text{ von } f \text{, wenn gilt: } \begin{Bmatrix} f(x) \le f(x_0) \\ f(x) \ge f(x_0) \end{Bmatrix}, \ \forall x \in D(f)$$

D. 1. 26. (***Relatives Minimum und Maximum***)
Die Funktion f sei in einer Umgebung der Stelle x_0 definiert. Der Funktionswert $F(x_0)$ heißt *relatives* $\begin{Bmatrix} \textit{Maximum} \\ \textit{Minimum} \end{Bmatrix}$ von f, wenn es eine Umgebung $U_e(x_0)$ von x_0 gibt mit

$$\left.\begin{cases} f(x) \le f(x_0) \\ f(x) \ge f(x_0) \end{cases}\right\},\ \forall x \in U_e(x_0) \cap D(f)$$

<u>S. 1. 22.</u> (*Notwendige Bedingung für die Existenz eines relativen Extremums*)
Die Funktion f sei an der Stelle x_0 differenzierbar und habe in $\operatorname{int} D(f)$ einen relativen Extremwert.
Dann gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

<u>S. 1. 23.</u> (*Hinreichende Bedingung für die Existenz eines relativen Extremums*)
Die Funktion f besitze auf einer Umgebung $U_e(x_0)$ der Stelle x_0 stetige Ableitungen bis zur $n-ten$ Ordnung ($n \ge 2$), und es gelte

$$f(x_0) = f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \text{aber} \quad f^{(n)}(x_0) \ne 0.$$

1. Ist n *gerade*, dann hat f an der Stelle x_0 einen relativen Extremwert, und zwar im Falle $\left\{\begin{matrix} f^{(n)}(x_0) < 0 \\ f^{(n)}(x_0) > 0 \end{matrix}\right\}$ ein relatives $\left\{\begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix}\right\}$.

2. Ist n *ungerade*, dann hat f an der Stelle x_0 <u>keinen</u> relativen Extremwert, sondern in einer gewissen Umgebung von x_0 ist f im Fall $\left\{\begin{matrix} f^{(n)}(x_0) < 0 \\ f^{(n)}(x_0) > 0 \end{matrix}\right\}$ eist streng monoton $\left\{\begin{matrix} \text{fallend} \\ \text{wachsend} \end{matrix}\right\}$.

<u>F. 1. 1.</u>
Die Funktion f besitze in einer Umgebung $U_e(x_0)$ der Stelle x_0 stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, und es gelte

$$f(x_0) = 0 \quad \text{aber} \quad f''(x_0) \ne 0.$$

Dann hat f an der Stelle x_0 einen relativen Extremwert, und zwar im Falle $\left\{\begin{matrix} f''(x_0) < 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{matrix}\right\}$ ein relatives $\left\{\begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix}\right\}$.

<u>BS. 1. 19.</u>
Die Gewinnfunktion einer Unternehmung lautet

$$G(x) = -x^3 + 2x^2 + 60x - 98$$

mit

x : Produktionsmenge [ME]
G : Gewinn [GE]

Für welche Produktionsmenge erzielt die Unternehmung einen maximalen Gewinn? Wie hoch ist dieser?

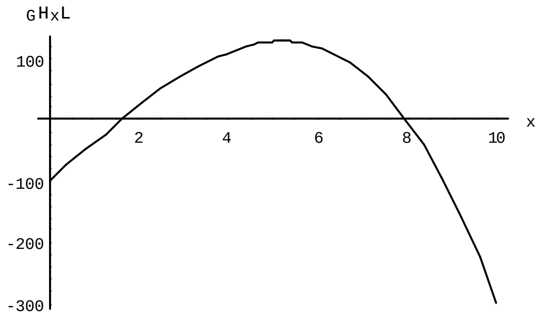
Lösung:

$$G'(x) = -3x^2 + 4x + 60$$

$$G'(x) = 0 \;\wedge\; x \geq 0 \;\Rightarrow\; x \approx 5.19$$

$$G''(x) = -6x^2 + 4, \quad G''(5.19) < 0.$$

Damit erzielt die Unternehmung bei einer Produktionsmenge von etwa 5.19 ME einen maximalen Gewinn von etwa 127.47 GE:



<u>S. 1. 24.</u> (*Eine weitere Hinreichende Bedingung*)
Se gebe ein $\varepsilon > 0$, so dass die Funktion f auf dem Intervall $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ stetig und dort – evtl. mit Ausnahme der Stelle x_0 selbst – differenzierbar ist.

1. Ist $\begin{Bmatrix} f'(x_0) > 0 \\ f'(x_0) < 0 \end{Bmatrix}$, $\forall x \in \,]x_0 - \varepsilon, x_0[$ und $\begin{Bmatrix} f'(x_0) < 0 \\ f'(x_0) > 0 \end{Bmatrix}$, $\forall x \in \,]x_0, x_0 + \varepsilon[$, dann hat f an der Stelle x_0 ein relatives Maximum (Minimum).

2. Ist $\begin{Bmatrix} f'(x_0) > 0 \\ f'(x_0) < 0 \end{Bmatrix}$, $\forall x \in \,]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[, \; x \neq x_0$, dann hat f an der Stelle x_0 keinen relativen Extremwert, sondern f ist auf $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ streng monoton $\begin{Bmatrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{Bmatrix}$.

<u>S. 1. 25.</u>
Ist die Funktion f auf dem Intervall I stetig und hat sie dort an genau einer Stelle x_0 einen relativen Extremwert, dann ist $f(x_0)$ auch ein absoluter Extremwert von f auf I .

S. 1. 26.
Die Funktion f sei auf dem Intervall I differenzierbar. Genau dann ist f auf I (streng) $\begin{Bmatrix} \text{konvex} \\ \text{konkav} \end{Bmatrix}$, wenn f' auf I (streng) monoton $\begin{Bmatrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{Bmatrix}$ ist.

S. 1. 27.
Die Funktion f habe auf dem Intervall I eine stetige erste Ableitung und auf $\operatorname{int} I$ eine zweite Ableitung. Dann gilt:

1. Genau dann ist f auf I $\begin{Bmatrix} \text{konvex} \\ \text{konkav} \end{Bmatrix}$, wenn gilt: $\begin{Bmatrix} f''(x) \geq 0 \\ f''(x) \leq 0 \end{Bmatrix}$, $\forall x \in \operatorname{int} I$.

2. Gilt $\begin{Bmatrix} f''(x) > 0 \\ f''(x) < 0 \end{Bmatrix}$, $\forall x \in \operatorname{int} I$, dann ist f auf I streng $\begin{Bmatrix} \text{konvex} \\ \text{konkav} \end{Bmatrix}$.

BS. 1. 20.
Für welche Outputwerte x ist die Gesamtkostenfunktion K mit

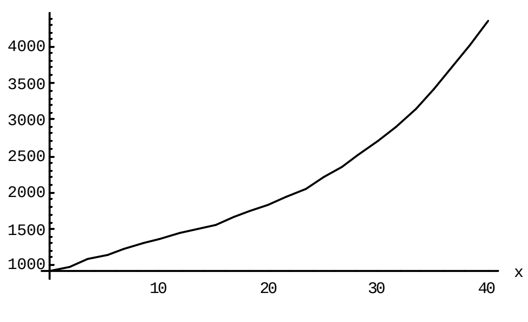
$$K(x) = \frac{1}{15}x^3 - 2x^2 + 60x + 900,\ x \geq 0$$

konvex bzw. konkav?

Lösung:

$K'(x) = 0.2x^2 - 4x + 60,\ x \geq 0$,
$K''(x) = 0.4x - 4$,
$K''(x) > 0 \iff x > 10$.

Damit ist K konkav für $0 < x < 10$ und konvex für $x > 10$. Dies bedeutet, dass die Kosten für $0 < x < 10$ degressiv und für $x > 10$ progressiv wachsend sind.
Die Funktion K hat also in $x = 10$ einen Wendepunkt mit $K(10) \approx 1366.67$:



S. 1. 28.
Die Funktion f sei an der Stelle x_0 zweimal differenzierbar und habe dort einen Wendepunkt. Dann gilt $f''(x_0) = 0$.

S. 1. 29.

Die Funktion f besitze auf einer Umgebung $U_e(x_0)$ der Stelle x_0 stetige Ableitungen bis zur $n-ten$ Ordnung ($n \geq 3$), und es gelte

$$f''(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \text{aber} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ist n *ungerade*, dann hat f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, andernfalls nicht.

BS. 1. 21. (*Kurvendiskussion*)

Die Gesamtkosten für die Produktion von x Mengeneinheiten eines Produktes seien durch die Kostenfunktion

$$K(x) = 8400x + \left(1008000x^2 - 3060x^3 + 3x^4\right) \cdot 10^{-4}, \quad x \geq 100$$

gegeben.

Es sind die wichtigsten Eigenschaften der Stückkostenfunktion $k(x) := \frac{K(x)}{x}$ zu diskutieren.

Lösung:

$$k(x) = 8400 + 10^{-4}(1008000x - 3060x^2 + 3x^3)$$

1. Definitionsbereich

$$D(k(x)) = \left[100, \bar{x}\right] ; \qquad \bar{x} : \text{Höchstkapazität des Unternehmens}$$

Im Weiteren sei $\bar{x} = 800$ angenommen.

1. Stetigkeit

$k(x)$ ist in D stetig.

3. *Schnittpunkte mit den Achsen*

a) *mit der $x-$Achse*

$$k(x) := 0 \quad \Rightarrow \quad 8400 + 10^{-4}(1008000x - 3060x^2 + 3x^3) = 0$$

Es lässt sich (numerisch) zeigen, dass $k(x)$ keine Nullstellen hat. Dies ist auch ökonomisch plausibel, da Stückkosten immer entstehen.

b) mit der y – Achse

Wegen $x \geq 100$ gibt es keine Schnittstelle mit der y – Achse. Es wird eine Mindestproduktion von 100 Einheiten angenommen. Die zugehörigen Durchschnittskosten betragen dann $k(100) = 15720.00 > 0$.

4. *Monotonie*

Es gilt

$$k'(x) = 10^{-4}(1008000 - 6120x + 9x^2)$$

$$k'(x) := 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 280, \qquad x_2 = 400$$

$$(x - 280)\cdot\left(x - 400\right) \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad k(x) \text{ ist monoton wachsend.}$$

Die Lösung der obigen Ungleichung ergibt:

$k(x)$ ist monoton wachsend für $\forall x \in]100, 280[\cup]400, 800[$
$k(x)$ ist monoton fallend für $\forall x \in]280, 400[$

5. *Extremwerte*

$$k''(x) = 10^{-4}(-6120x + 18x); \qquad k''(280) = -0.108 < 0; \qquad k''(400) = 0.108 > 0$$

$k(x)$ nimmt also in $x = 280$ ein relatives Maximum an mit $k(280) = 19219.20$ und in $x = 400$ ein relatives Minimum an mit $k(400) = 18960.00$.
Wegen $k(100) = 15720.00$ und $k(800) = 46800.00$ nimmt $k(x)$ in $x = 100$ das absolute Minimum und in $x = 800$ das absolute Maximum an.
Der Betrieb hat also bei einer Produktion von 100 ME die geringsten Durchschnittskosten.

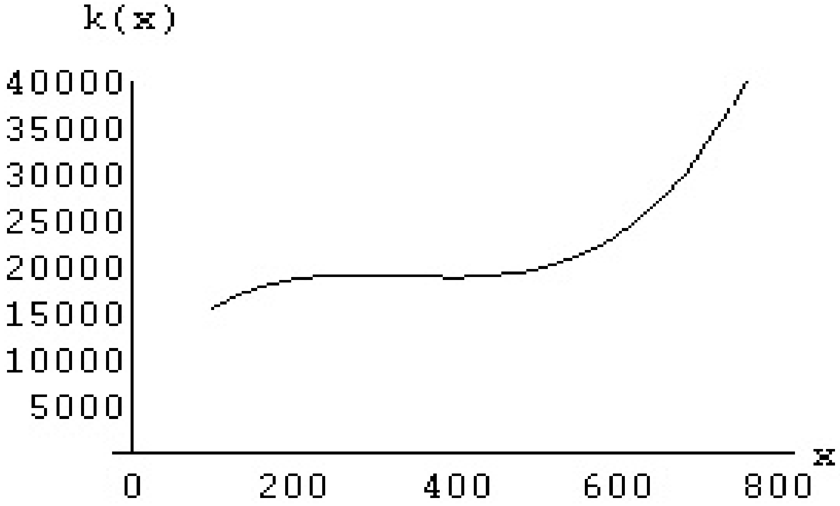
6. *Krümmungsverhalten*

Aus $k''(x) = 10^{-4}(-6120x + 18x) \geq 0$, d.h. $x \geq 340$, folgt:

$k(x)$ ist konvex für $\forall x \in]340, 800[$
$k(x)$ ist konkav $\forall x \in]100, 340[$

In $x = 340$ liegt also ein Wendepunkt vor.
Die Stückkosten wachsen also progressiv in $]340, 800[$ und degressive in $]100, 340[$.

7. *Graph der Funktion:*



(Letzte Aktualisierung: 29.08.06)