Analysis in der Ökonomie
(Teil 2)
Aufgaben

1.
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$y(A,K) = 2A^{0.4}K^{0.6}, \quad A,K > 0$$

Dabei sind:

K : das Kapital
A : die Arbeitskräfte
y : die Produktion

Berechnen Sie die partiellen Grenzproduktivitäten der Arbeit und des Kapitals.

2.
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$y(A,K) = 90A^{0.8}K^{0.2}, \; A,K > 0$$

Dabei sind:

K : das Kapital
A : die Arbeitskräfte
y : die Produktion

Ermitteln und interpretieren Sie die partiellen Grenzproduktivitäten der Arbeit (bzw. des Kapitals)

i) für $A = 1000, \quad K = 200$
ii) wenn pro eingesetzter Arbeitseinheit eine Kapitalausstattung von 8 GE vorhanden ist.

3.
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$y(A,K) = A^{0.8}K^{0.2}, \quad A,K > 0$$

Dabei sind:

K : das Kapital
A : die Arbeitskräfte
y : die Produktion

Berechnen und interpretieren Sie die ersten und die zweiten partiellen Ableitungen dieser Funktion bzgl. der Arbeit und des Kapitals.

4.
Ein Betrieb hat die Produktionsfunktion

$$P(A,K) = 50 \cdot A^{0.6} \cdot K^{0.4}, \quad 0 \le A \le 100, \quad 0 \le K \le 200 .$$

Hier sind:

A: der Arbeitsinput,
K: der Kapitalinput,
$P(A,K)$: die produzierte Menge in Abhängigkeit von A und K.

1. Bestimmen Sie die produzierte Menge für $A = 40$ und $K = 60$.
2. Berechnen und interpretieren Sie die erste partielle Ableitung der Produktionsfunktion bezüglich des Inputs Arbeit für $A = 40$ und $K = 60$.
3. Zeigen Sie, dass der Exponent 0.6 die Elastizität der Produktion bezüglich des Inputs Arbeit ist. Was versteht man darunter?

5.
Ein Betrieb hat die Produktionsfunktion

$$P(A,K) = 40 \cdot A^{0.3} \cdot K^{0.7}, \quad 0 \le A \le 200, \quad 0 \le K \le 150 .$$

Hier sind:

A: der Arbeitsinput,
K: der Kapitalinput,
$P(A,K)$: die produzierte Menge in Abhängigkeit von A und K.

1. Bestimmen Sie die produzierte Menge für $A = 100$ und $K = 90$.
2. Berechnen und interpretieren Sie die erste partielle Ableitung der Produktionsfunktion bezüglich des Inputs Kapital für $A = 100$ und $K = 90$.
3. Zeigen Sie, dass der Exponent 0.7 die Elastizität der Produktion bezüglich des Inputs Kapital ist. Was versteht man darunter?

6.
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$y(A,K) = -3A^3 + 2A^2 + 50A - 3A^2K + 2AK^2 - 3K^3 + 5K^2, \quad A,K > 0$$

Dabei sind:

K: das Kapital
A: die Arbeitskräfte
y: die Produktion

Ermitteln Sie für

a) $A = 2; \quad K = 5$
b) $A = 10; \quad K = 2$

jeweils sämtliche partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung und geben Sie damit eine ökonomische Charakterisierung des Verhaltens der Produktionsfunktion in der näheren Umgebung der jeweiligen vorgegebenen Inputkombination.

7.
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$y(A,K) = 2A^{0.2}K^{0.8}, \quad A,K > 0$$

Dabei sind:

K : das Kapital
A : die Arbeitskräfte
y : die Produktion

1. Ermitteln Sie für die Faktorinputkombination $A = 20, K = 10$

   i.) die partiellen
   ii.) die totalen Outputänderungen,

   wenn die Inputs um dA bzw. dK geändert werden

2. Wie ändert sich der Output

   a) näherungsweise
   b) exakt,

   wenn der Arbeitsinput um 0.3 Einheiten vermindert und gleichzeitig der Kapitalinput um 0.1 Einheit erhöht wird, ausgehend von $A = 20, K = 10$?

8.
Für zwei verbundene Güter seien die möglichen Absatzmengen x_1, x_2 in Abhängigkeit von den Marktpreisen p_1, p_2 durch folgende Preis-Absatz-Funktionen gegeben:

$$x_1(p_1, p_2) = -0.5p_1 + 2p_2 + 10$$
$$x_2(p_1, p_2) = 0.8p_1 - 1.5p_2 + 15$$

1. Untersuchen Sie mit Hilfe der vier möglichen partiellen Ableitungen

   $$\frac{\partial x_i}{\partial p_k}, \quad i,k = 1,2$$

   wie sich die Nachfrage x_i nach Gut i ändert bei Änderung des Preises p_k des Gutes $k (i, k = 1, 2)$

2. Handelt es sich um komplementäre oder substitutive Güter?
3. Ermitteln Sie für jedes Gut die individuelle Erlösfunktion und interpretieren Sie die partiellen Gesamterlöse

   a) bzgl. der Preise
   b) bzgl. der Mengen

   bei einer Preiskombination $p_1 = 8\,\text{GE/ME}_1,\ p_2 = 5\,\text{GE/ME}_2$

9.
Die Nachfrage x_1, x_2 nach zwei Gütern sei in Abhängigkeit der Güterpreise $p_1,\ p_2$.
Untersuchen Sie mit Hilfe der Kreuzpreiselastizität $\varepsilon_{x_1, p_2}, \varepsilon_{x_2, p_1}$, ob es sich um substitutive oder komplementäre Güter handelt:

1. $x_1(p_1, p_2) = 100 - 0.8p_1 + 0.3p_2$
   $x_2(p_1, p_2) = 150 + 0.5p_1 - 0.6p_2$

2. $x_1(p_1, p_2) = 4e^{p_2 - p_1}$
   $x_2(p_1, p_2) = 3e^{p_1 - p_2}$

3. $x_1(p_1, p_2) = \dfrac{100}{p_1 p_2}$
   $x_2(p_1, p_2) = 5e^{p_2 - p_1}$

10.
Bei der Produktion eines Gutes hängt der Output x von der Einsatzmengenkombination $(r_1 \quad r_2 \quad r_3)$ dreier Produktionsfaktoren gemäß folgender Produktionsfunktion ab:

$$x(r_1 \quad r_2 \quad r_3) = 0.5r_1^{0.5}r_2^{0.5} + 0.1r_1^{0.4}r_3^{0.6} + 0.2r_2^{0.3}r_3^{0.7}$$

Ermitteln Sie für eine vorgegebene Inputkombination $(r_1 \quad r_2 \quad r_3) = (4 \quad 5 \quad 9)$ die partiellen und totalen Grenzprodukte, wenn r_1 um 0.2 Einheiten erhöht wird und gleichzeitig r_2 und r_3 um jeweils 0.1 Einheiten vermindert werden.

11.
Gegeben sei die Produktionsfunktion f einer Einproduktunternehmung mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - x_1(x_2 + x_3)}\,.$$

1. Zeigen Sie, f homogen vom Grad 1 ist und interpretieren Sie die Aussage.
2. Ermitteln Sie die partiellen Grenzproduktivitäten der Faktoren sowie die Grenzrate der Substitution $\dfrac{\partial x_3}{\partial x_2}$ jeweils für $x_1 = x_2 = x_3 = 100$.

3 . Bestimmen Sie die partiellen Änderungsraten und Elastizitäten des Produktionsniveaus $f(x_1, x_2, x_3)$ bezüglich des ersten und dritten Faktors, jeweils für $x_1 = x_2 = x_3 = 100$.

12.
Die Absatzwirkung y einer Werbekampagne für ein Produkt hänge von den für zwei Medien eingesetzten Werbebudgets x_1, x_2 in folgender Weise ab:

$$y = f(x_1, x_2) = 10\sqrt{x_1} + 20\ln(x_2 + 1) + 50, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

1. Berechnen Sie $f(100{,}100)$ sowie die partiellen Änderungsraten und Elastizitäten der Absatzwirkung bezüglich der beiden Werbebudgets für $x_1 = x_2 = 100$.
2. Ermitteln Sie die Richtungsableitungen von f im Punkt $(x_1, x_2) = (100{,}100)$ in Richtung $(1, 2)$ bzw. (2, 1) und zeigen Sie, daß die Richtung (2, 1) für die Absatzwirkung günstiger als die Richtung (1, 2) ist. Interpretieren Sie dieses Ergebnis.
3. Ermitteln Sie die Menge aller Budgetvektoren $(x_1, x) > (0{,}0)$, für die die Grenzrate der Substitution von x_2 bzgl. x_2 gerade –1 ergibt. Stellen Sie diese Menge graphisch dar und interpretieren Sie das Ergebnis.
4. Berechnen Sie die Veränderung der Absatzwirkung

$$\Delta f(100{,}100) = f(100 + \Delta x_1, 100 + \Delta x_2) - f(100{,}100)$$

   mit $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 1$ näherungsweise mit Hilfe des totalen Differentials und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Wert.

13.
Zwei Produzenten P_1, P_2 bieten je ein Gut an. Zwischen den Absatzvariablen x_1, x_2 und den Preisvariablen p_1, p_2 gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} x_1 &= 100 - 2p_1 - p_2 \\ x_2 &= 120 - p_1 - 3p_2 \end{aligned}$$

Die Kosten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} K_1(x_1) &= 120 + 2x_1 \\ K_2(x_2) &= 120 + 2x_2 \end{aligned}$$

1. Ermitteln Sie die Gewinnfunktionen G_1, G_2 beider Produzenten sowie die gemeinsame Gewinnfunktion $G = G_1 + G_2$ jeweils in Abhängigkeit von p_1, p_2.
2. Wie sind die Preise zu wählen, daß der gemeinsame Gewinn maximal wird? Geben Sie den maximalen Gewinn an.
3. Nach einem Streit setzt Produzent P_2 den Preis $p_2 = 16$. Wie hat dann P_1 den Preis p_1 zu wählen, damit G_1 maximal wird?
4. Ist es für die Käufer des von G_1 angegebenen Gutes von Vorteil, wenn der Konflikt zwischen P_1 und P_2 beigelegt wird?

14.
Gegeben Sei die Zeitreihe für den Absatz eines Produktes

Zeit t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Absatz $y(t)$	10	12	12	12	14	15	15	15	17	18

1. Stellen Sie den Trend als eine lineare Funktion dar.
2. Veranschaulichen Sie die Wertepaare der Tabelle sowie die ermittelte Trendfunktion graphisch.
3. Zeigen Sie, daß die Absatzänderungsrate monoton wächst.
4. Prognostizieren Sie den Absatz $y(11)$ und $y(12)$.

15.
Eine Firma möchte 30 neue Lieferwagen kaufen Ein Autohändler bietet zwei verschiedene Modelle M_1 und M_2 an. Der Verkäufer bietet folgende Alternativen:

1. Die 30 Autos werden unabhängig von dem Modell zu einem Stückpreis von 50000 € gekauft.
2. Es wird ein Gesamtpreis für die 30 Autos nach folgender Formel berechnet:

$$p(x_1, x_2) = \frac{3}{2} x_1 + x_2 + 25x_1 - 30x_2 + 20$$

Hier sind:

x_i, $i = 1, 2$: Anzahl der Autos des Modelle M_i,
p: Gesamtpreis in 100000 €.

Welche Alternative ist für die Firma günstiger?

16.
In einem Lager mit einer Lagerkapazität von 4500 Mengeneinheiten werden zwei Materialien M_1 und M_2 gelagert. Bei dem Material M_1 handelt es sich um hochwertige Diamantbohrer, bei M_2 um Turbinenradschaufeln. Zur Lagerung eines Diamantbohrers benötigt man genau eine ME der Lagerkapazität. Die Lagerung einer Turbinenradschaufel beansprucht aufgrund ihres mächtigen Volumens bereits 2 ME.
Da die Lagerkapazität begrenzt ist, konkurrieren die beiden Materialarten um den verfügbaren Lagerplatz. Zurzeit sei das Lager leer, so dass die volle Lagerkapazität zur Verfügung steht. Durch eine neue Bestellung soll das Lager vollständig aufgefüllt werden.
Die Lagerkosten K_L können durch folgende Gleichung angegeben werden:

$$K_L = (4000 - x_1)^2 + (2750 - x_2)^2.$$

Dabei ist

x_i: „Die Bestellmenge für M_i, $i = 1, 2$".

1. Welche Mengen von den beiden Materialarten müssen bestellt werden, um die Lagerkosten zu minimieren?
2. Wie hoch sind die minimalen Lagerkosten.

(Verwenden Sie zur Lösung des Problems die Lagrange-Methode. Auf die Überprüfung der hinreichenden Bedingungen soll verzichtet werden.)

17.
Eine Unternehmung stellt unter Verwendung von drei Chemikalien als Faktoren eine Schönheitscreme her. Für die Produktionsfunktion gilt die Beziehung

$$y = f(x, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 .$$

Dabei steht x_i $(i = 1, 2, 3)$ für die Mengeneinheiten des Faktors i, y für die Produktquantität. Für die Faktorpreise gilt

$$(p_1, p_2, p_3) = (2, 2, 1) .$$

1. Berechnen Sie die kostenminimale Faktorkombination für $y = 2000$
2. Ermitteln Sie die partiellen Änderungsraten und Elastizitäten der Faktoren für die in 1. Berechnete Faktorkombination.

18.
Für eine Unternehmung gelten folgende Beziehungen zwischen den Preisen p_1, p_2, p_3 und den Absatzquantitäten x_1, x_2, x_3:

$$p_1 = f_1(x_1) = 100 - x_1$$
$$p_2 = f_2(x_2) = 200 - x_2$$
$$p_3 = f_3(x_3) = 300 - x_3$$

Aus Kapazitätsgründen muß die wöchentliche Produktion die Gleichung

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 70$$

genügen.

1. Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die Produktkombination, die den wöchentlichen Umsatz maximiert und geben Sie den maximalen Umsatz an.
2. Interpretieren Sie die in 1. erhaltenen Lagrange-Multiplikatoren.
3. Wie verändert sich das Ergebnis von 1. unter der zusätzlichen Bedingung $x_1 = x_2$. Geben Sie ein ganzzahliges Ergebnis an.

(Letzte Aktualisierung: 22.01.06)