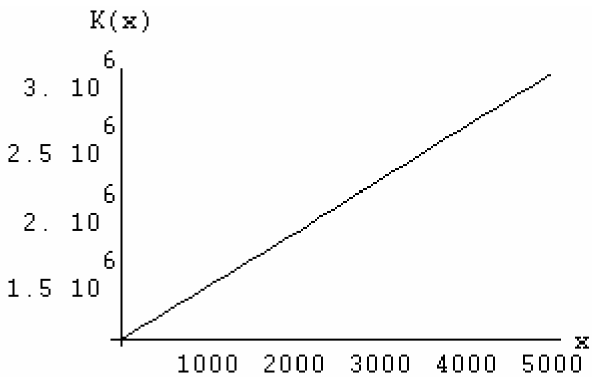
Analysis in der Ökonomie
(Teil 1)
Lösungen

1.

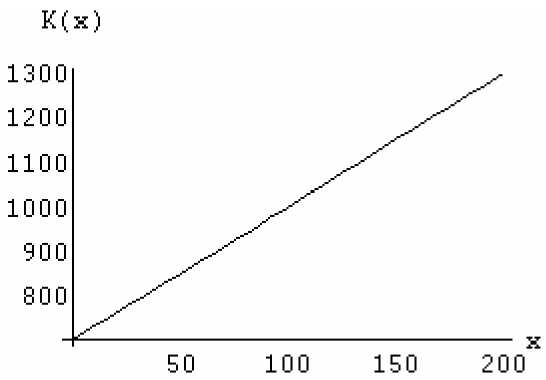
1. Ja, bedingt durch die variablen Kosten.
2. Ja, es besteht ein eindeutiger Zusammenhang.
3. Die Produktionsmenge.
4. Die Gesamtkosten.
5. $K(x) = 400x + 1000000$.
6. Definitionsbereich: $[0, \quad 5000]$; Wertebereich: $[1000000, \quad 30000000]$.
7. .

Produktionsmenge	0	1000	2000	3000	4000	5000
Gesamtkosten (Mio. €)	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0



2.

1.



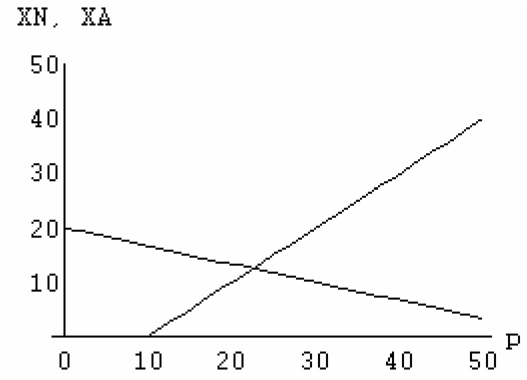
2.
$K_f = 700, \quad K_v = 3$

3.
$K(150) = 700 + 3 \cdot 150 = 1150\,\text{GE}$

3.

$$x_A = x_N \quad \Rightarrow \quad -10 + \mathrm{p} = 20 - \frac{1}{3}p$$

$$p = 22.5\,\mathrm{GE}, \quad x_A = x_N = 12.5\,\mathrm{ME}$$

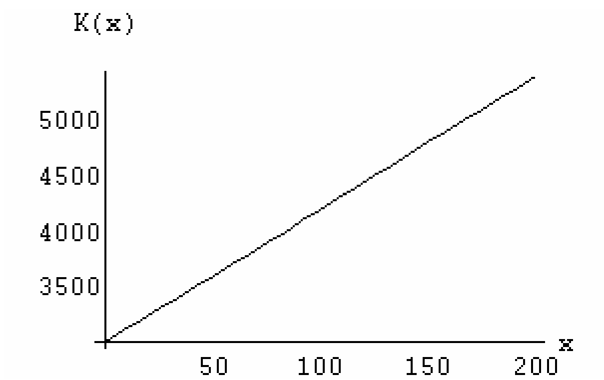


4.
Es gilt:

$$K(x) - K_1 = \frac{K_2 - K_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$K(x) - 15000 = \frac{13800 - 15000}{900 - 1000}(x - 1000),$$

$$K(x) = 12x + 3000$$



5.
1.
Bekannt sind die Punkte $(0; 500)$ und $(200; 0)$. Damit gilt für die Nachfragefunktion:

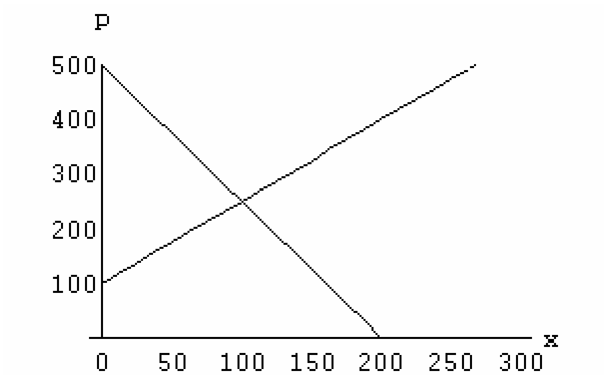
$$p(x) - 500 = \frac{0 - 500}{200 - 0}(x - 0)$$

d.h.

$$p(x) = 500 - 2.5x$$

Bekannt sind die Punkte $(0;100)$ und die Steigung 1.5. Damit gilt für die Angebotsfunktion:

$$p(x) = 1.5x + 100$$



2.

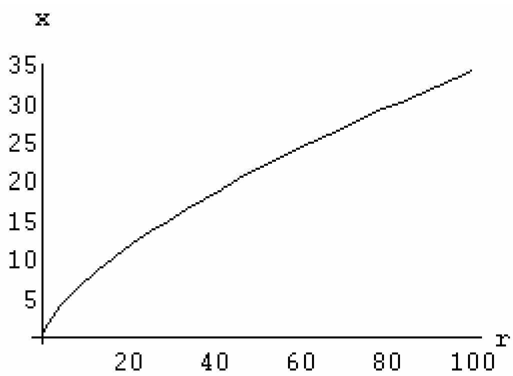
$$500 - 2.5x = 1.5x + 100, \qquad x_g = 100, \quad p_g = 250$$

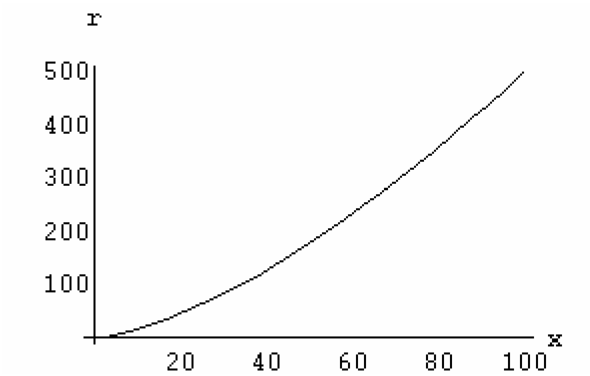
3.

$$200 = 500 - 2.5x_N \quad \Rightarrow \quad x_N = 120$$
$$200 = 1.5x_A + 100 \quad \Rightarrow \quad x_A = 66.67$$

6.
Es gilt

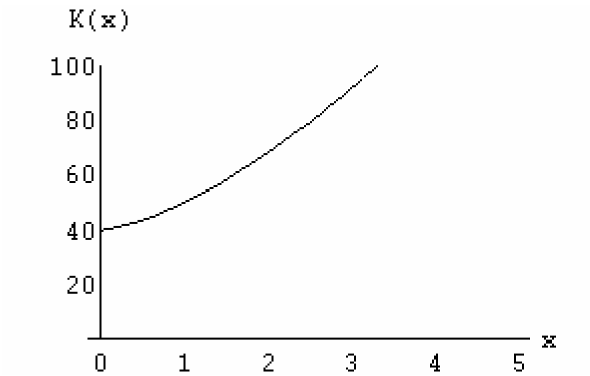
$$x = \sqrt[3]{4r^2}, \quad r \geq 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{x^3}$$





$K(r) = 40 + 20r$

$K(x) \; = 40 + 10\sqrt{x^3}$

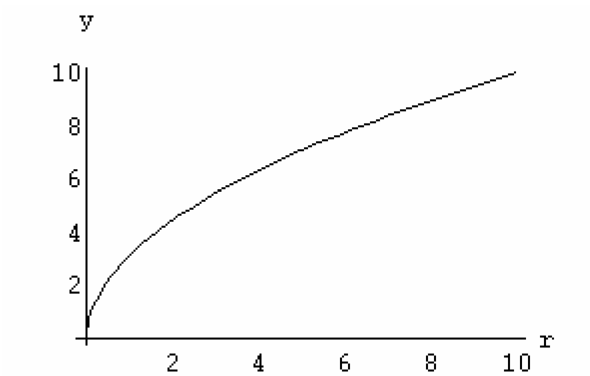


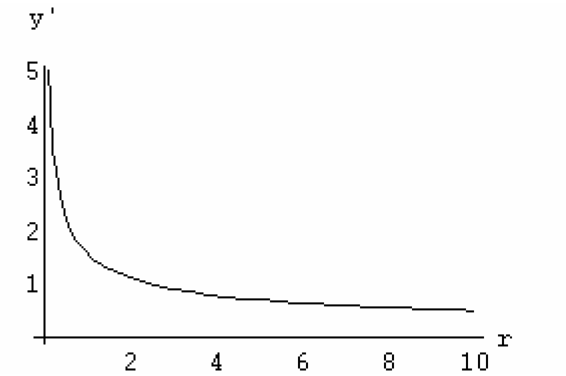
7.

1.

$$y^{'} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{r}}, \qquad y^{''} = -\frac{\sqrt{10}}{4\sqrt{r^3}} < 0\,,$$

d.h. sie hat abnehmende Grenzerträge.





2.

$y = \sqrt{10r}\,,\qquad y^2 = 10r\,,\qquad r = 0.1y^2,\qquad K(r) = 2r$

$K(y) = 0.2y^2$

8.

1. Es gilt.

$$K_A(x) = 100 + x,\quad 0 \le x \le 100\,,$$

$$\begin{aligned} K_A(x) &= 100 + 100\cdot 1 + (x-100)\cdot 0.8 \\ &= 120 + 0.8x,\quad 100 < x \le 200 \end{aligned}$$

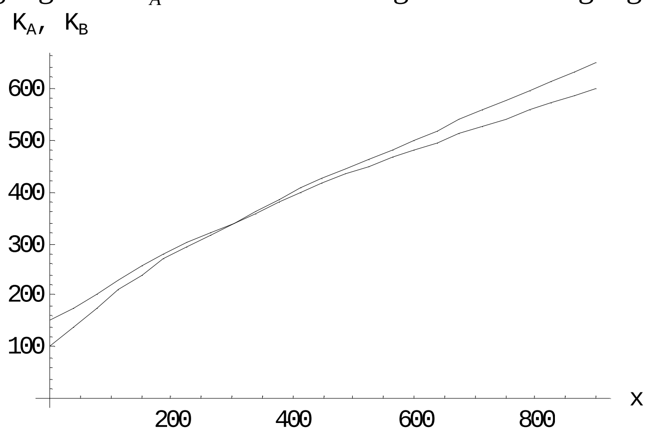
oder zusammenfassend:

$$K_A(x) = \begin{cases} 100 + x & \text{für} \quad 0 \le x \le 100 \\ 120 + 0.8x & \text{für} \quad 100 < x \le 200 \\ 160 + 0.6x & \text{für} \quad 200 < x \le 400 \\ 200 + 0.5x & \text{für} \quad 400 < x \end{cases}$$

$$K_B(x) = \begin{cases} 150 + 0.7x & \text{für} \quad 0 \le x \le 200 \\ 190 + 0.5x & \text{für} \quad 200 < x \le 500 \\ 240 + 0.4x & \text{für} \quad 500 < x \end{cases}$$

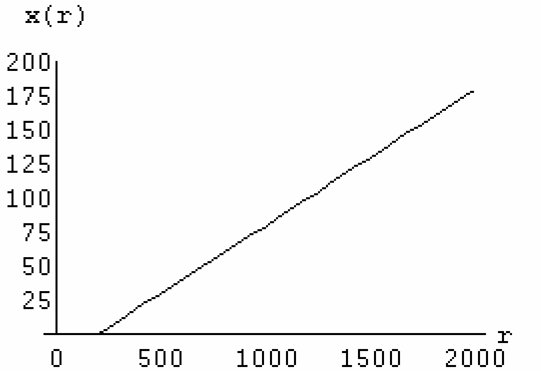
2.

Bis zu 300 km ist Tarif A für den Mieter am günstigsten, bei mehr als 300 km sollte er Tarif B wählen, weil die Steigung von K_A stets kleiner oder gleich der Steigung von K_B ist.



9.

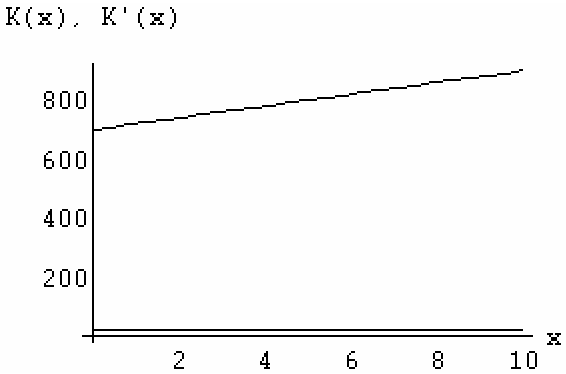
1.



$$x(r) = -20 + 0.1r \qquad \Rightarrow \qquad r(x) = 10x + 200$$

$$\begin{aligned} K(x) &= K_{\text{var}} + K_{fix} \\ &= (10x + 200) \cdot 2 + 300 = 20x + 700 \end{aligned}$$

$$K^{'}(x) = 20$$

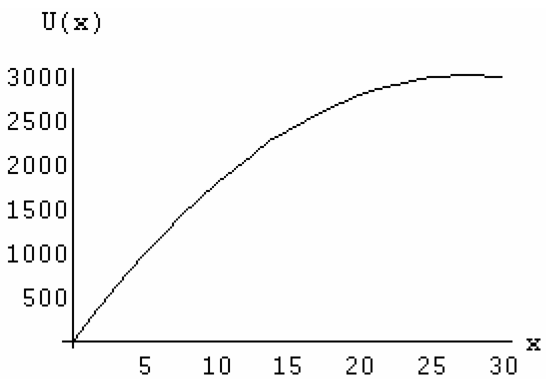


2.

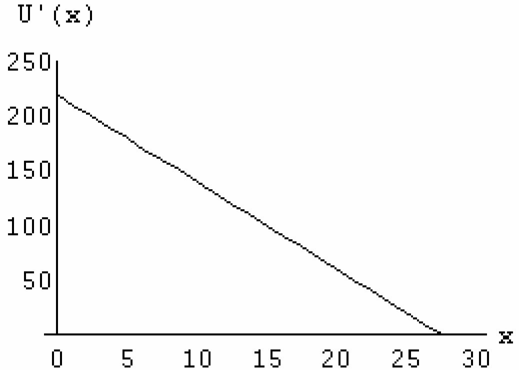
Es gibt wegen $K^{'}(x) = 20 \neq 0$ keine kostenminimale Menge.

3.

$$\begin{aligned} U(x) &= p(x) \cdot x \\ &= 220x - 4x^2, \end{aligned}$$



$U^{'}(x) = 220 - 8x$.



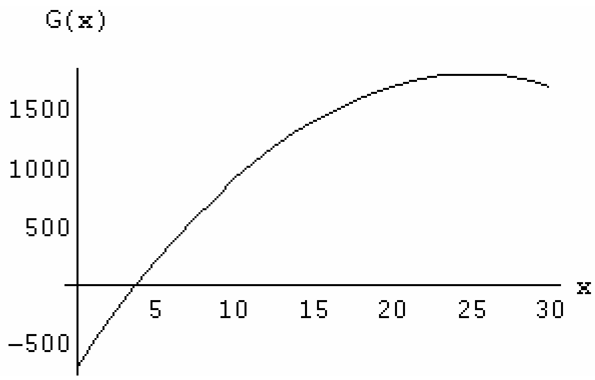
4.

$G(x) = U(x) - K(x)$, $\quad G^{'}(x) = U^{'}(x) - K^{'}(x) = 220 - 8x - 20$.

$G^{'}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 25$,

$G^{''}(x) = -8 < 0$, $\quad G(25) = 1800$ GE.

Also bei gewinnmaximaler Produktionsmenge von 25 ME wird ein Gewinn von 1800 GE erzielt.



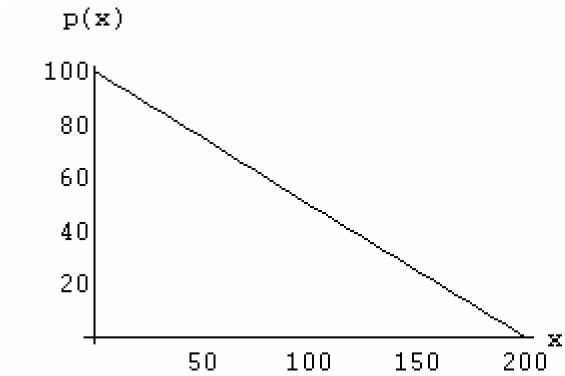
5.

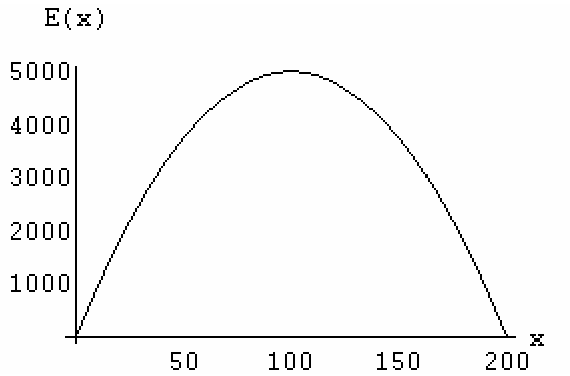
$p(25) = 120$ GE

10.

1.

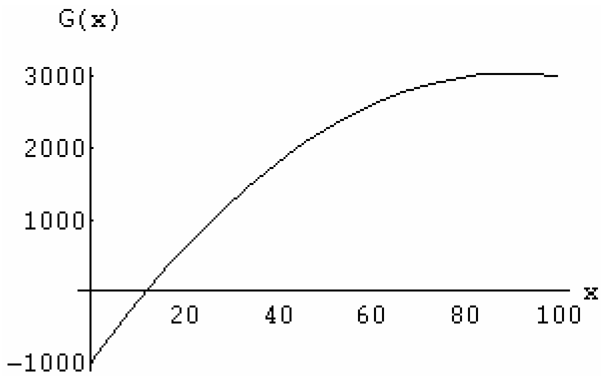
$$E(x) = p(x) \cdot x$$
$$= -0.5x^2 + 100x$$





2.

$$G(x) = E(x) - K(x)$$
$$= -0.5x^2 + 90x - 1000$$



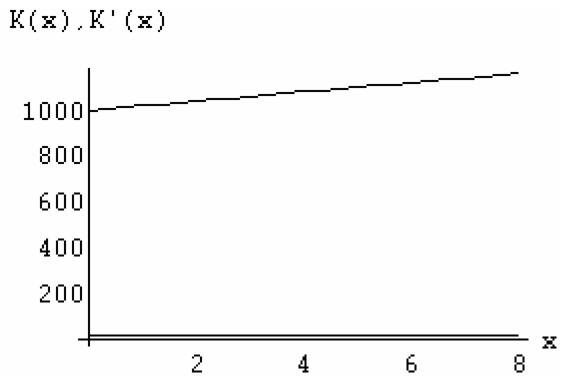
3.

$$G'(x) = -x + 90 \quad , \quad G'(x) := 0 \quad \Rightarrow \quad x = 90$$

$$G''(x) = -1 < 0 .$$

Es wird also für $x = 90$ ME der maximale Gewinn von $G(90) = 3050$ GE erzielt. Der entsprechende Preis lautet: $p(90) = 55$ GE.

11.
1.

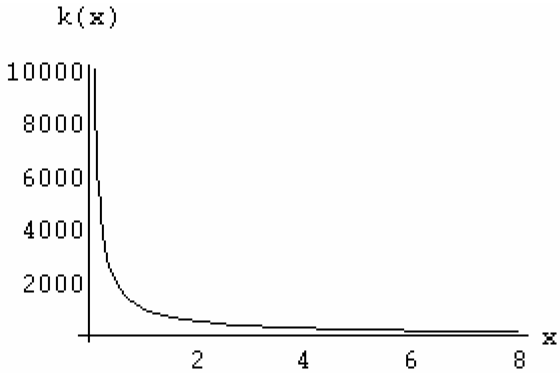


$K'(x) = 20$.

Eine Änderung der Ausbringungsmenge um 1 Einheit verursacht eine Änderung der Gesamtkosten um etwa 20 GE.

2.

$$k(x) := \frac{K(x)}{x} = \frac{1000}{x} + 20, \quad x > 0$$



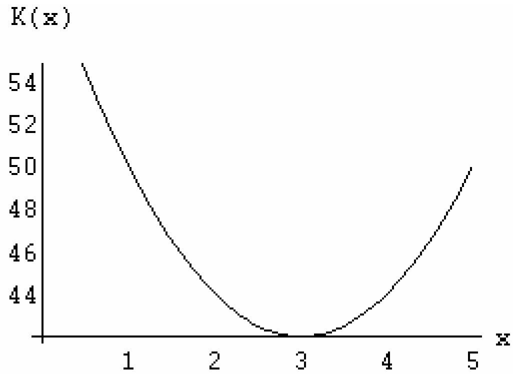
3.

$$\lim_{x\to+\infty} K(x) = \lim_{x\to+\infty} (1000 + 20x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} k(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1000}{x} + 20\right) = 20 = K'(x)$$

12.

1.



$$K'(x) = -12 + 4x$$

$$K'(x) := 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

$$K''(x) = 4 > 0,$$

d.h. die Gesamtkostenfunktion nimmt ihr (absolutes) Minimum in $x = 3$ an mit $K(3) = 42$

2.

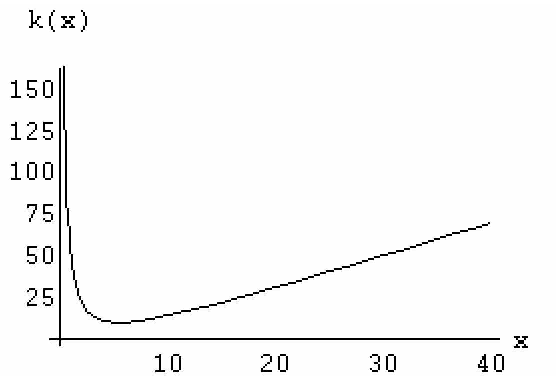
$$k(x) := \frac{K(x)}{x}$$
$$= \frac{60}{x} - 12 + 2x, \quad x > 0$$

$$k'(x) = -\frac{60}{x^2} + 2, \quad x > 0,$$

$$k'(x) := 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{30},$$

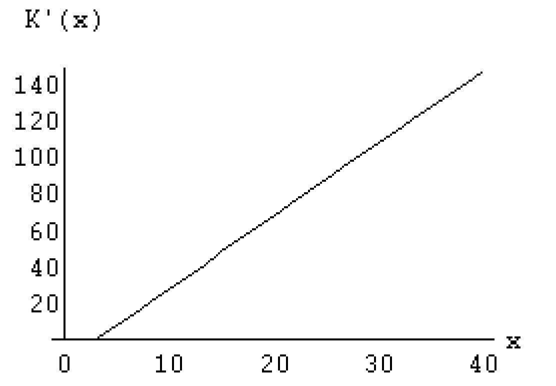
$$k''(x) = \frac{120}{x^3} > 0 \quad ,$$

d.h. die Funktion $k(x)$ nimmt ihr (absolutes) Minimum in $x = \sqrt{30}$ an.



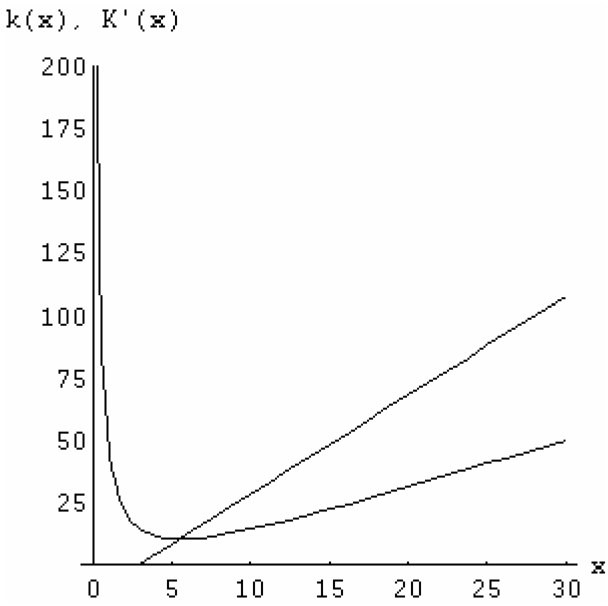
3.

$$K'(x) = -12 + 4x, \qquad K''(x) = 4 \neq 0, \quad \text{nein.}$$



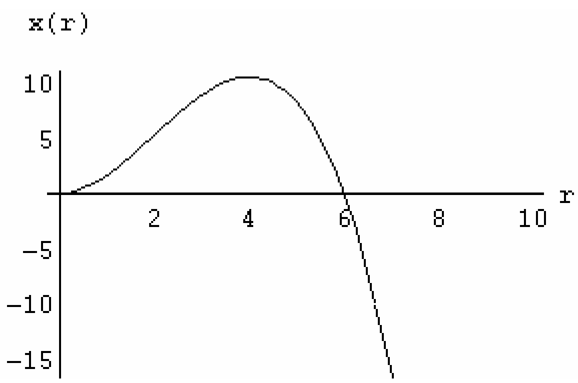
4.

$$-12 + 4x = \frac{60}{x} - 12 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{30}.$$



5.
Die Grenzkostenfunktion gibt an, um wie viele Einheiten sich die Kosten näherungsweise ändern, wenn sich die Produktion um eine Einheit ändert. Die Durchschnittskosten sind Kosten/ME der Produktion.

13.
1.



$$x'(r) = -r^2 + 4r$$
$$= r(4 - r)$$

$$x'(r) := 0 \quad \Rightarrow \quad r = 4$$

Wegen

$$x''(r) = -2r + 4, \quad x''(4) < 0$$

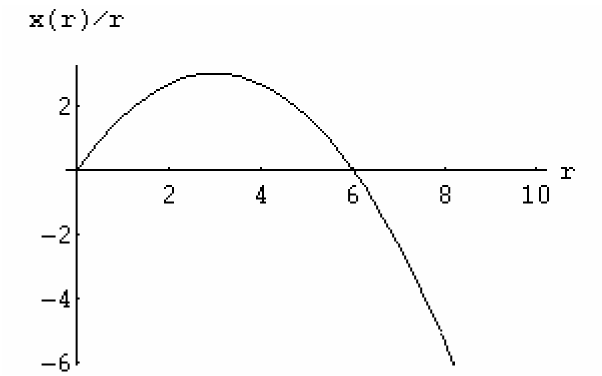
nimmt $x(r)$ in $r = 4$ ein relatives (und absolutes) Maximum an.

2.

$$x(r) = -\frac{1}{3}r^3 + 2r^2 = r^2(2-\frac{1}{3}r) < 0 \iff 2-\frac{1}{3}r < 0 \iff r > 6$$

3.

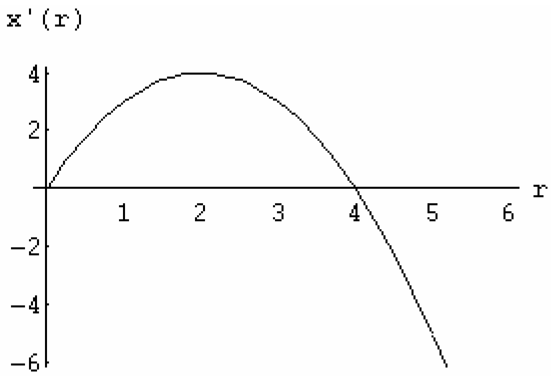
$$\frac{x(r)}{r} = -\frac{1}{3}r^2 + 2r$$



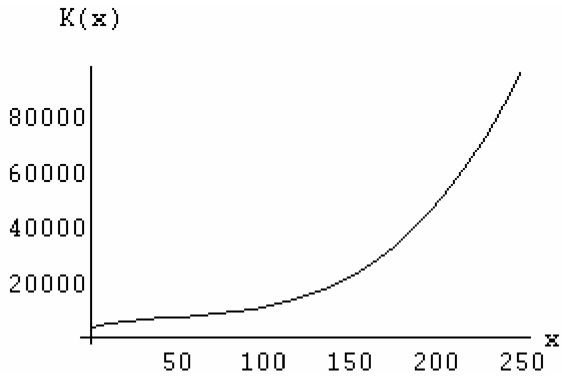
4.
Wegen

$$\left(\frac{x(r)}{r}\right)' = -\frac{2}{3}r + 2 := 0 \Rightarrow r = 3, \left(\frac{x(r)}{r}\right)'' = -\frac{2}{3} < 0$$

nimmt $\frac{x(r)}{r}$ ihr relatives (und absolutes) Maximum in $r = 3$ an.
5.
$x'(r)$ gibt an, um wieviel sich die Produktion näherungsweise ändert, wenn die Faktoreinsatzmenge um 1 Einheit verändert wird.



14.



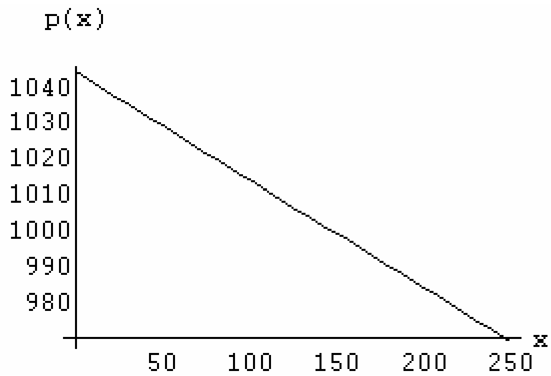
1.

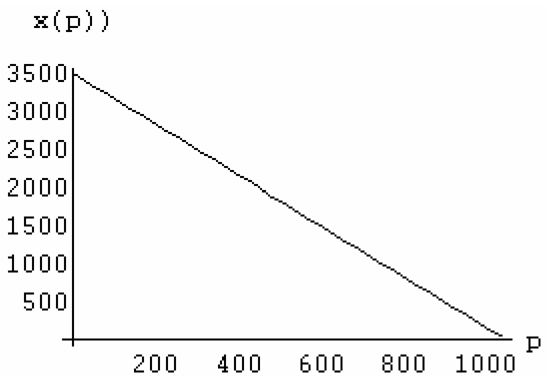
$$p(x) = 1044 - 0.3x \quad \Rightarrow \quad x(p) = 3480 - 3.\bar{3}\,p \,.$$

Es kann für keinen Preis bei einer Erhöhung um eine GE/ME ein Nachfragerückgang um 0.3 ME entstehen, da dieser wegen

$$x'(p) = 3480 - 3.\bar{3}$$

für jeden Preis etwa -3.33 beträgt.





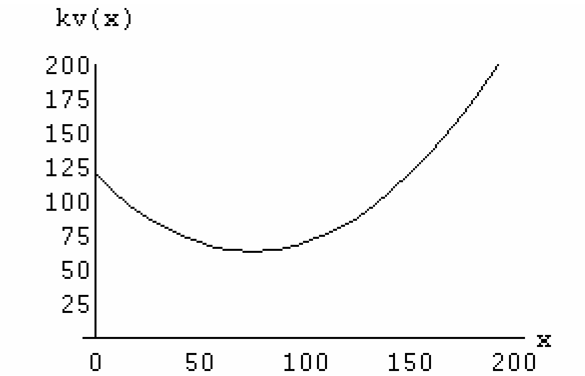
2.

$$k_v(x) = 0.01x^2 - 1.5x + 120$$

$$k_v'(x) = 0.02x - 1.5$$

$$k_v'(x) := 0 \quad \Rightarrow \quad x = 75, \quad k_v''(x) = 0.02 > 0$$

Damit ist $k_v(x)$ für $x = 75$ ME minimal.



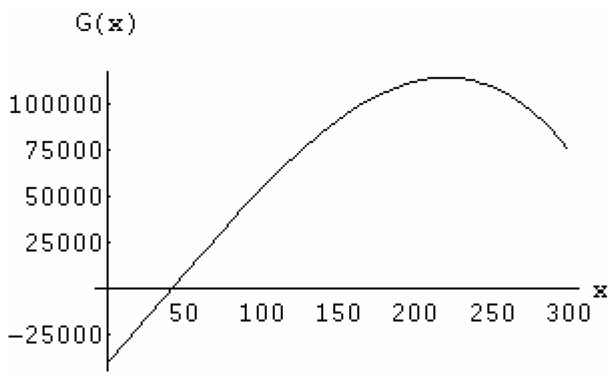
3.

$$G(x) = E(x) - K(x)$$
$$= -0.01x^3 + 1.2x^2 + 924x - 4000$$

$$G'(x) = -0.03x^2 + 2.4x + 924$$

$$G'(x) := 0 \quad \Rightarrow \quad x = 220\,\text{ME}, \quad G''(x) = -0.06x + 2.4 \quad \Rightarrow \quad G''(220) < 0.$$

Damit ist der Gesamtgewinn für $x = 220$ ME maximal. Der zugehörige Preis lautet: $p(220) = 978\,\text{GE}$.

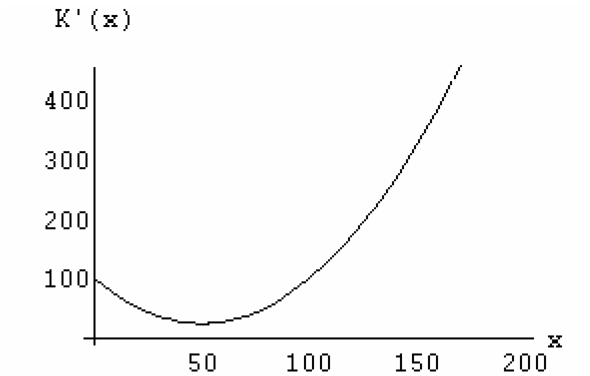


4.

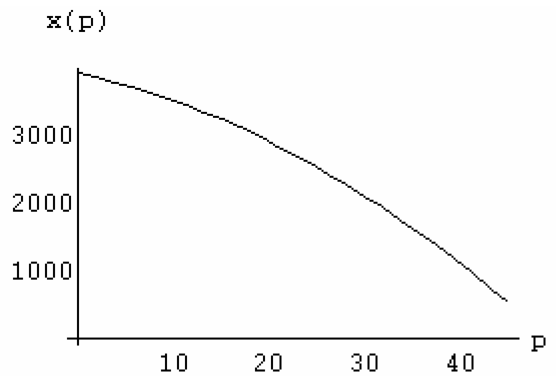
$$K'(x) = 0.03x^2 - 3x + 100, \quad K''(x) = 0.06x - 3$$

$$K''(x) := 0 \quad \Rightarrow \quad x = 50, \quad K'''(x) = 0.06 > 0.$$

Damit ist $K'(x)$ für $x = 50$ ME minimal. Der zugehörige Preis lautet $p(50) = 1044 - 0.3 \cdot 50 = 1029.00$ GE/ME.

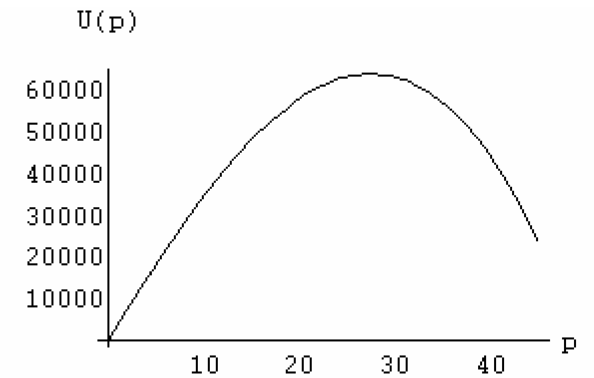


15.

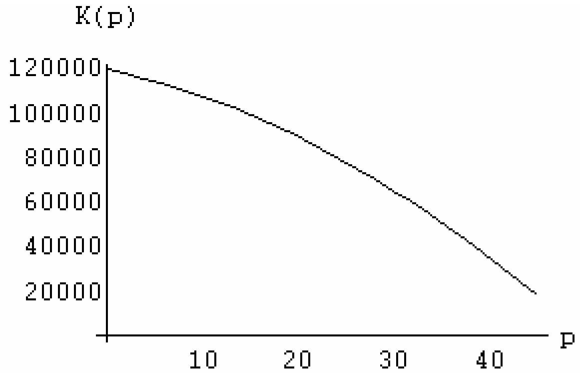


1.

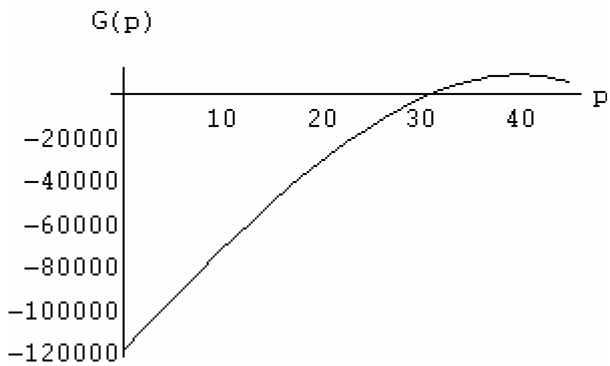
$$U(p) = x(p) \cdot p$$
$$= 3900p - 30p^2 - p^3, \quad 0 \le p \le 45$$



$$K(p) = 2000 + 30x$$
$$= 2000 + 30(3900 - 30p - p^2)$$
$$= 119000 - 900p - 30p^2 \qquad 0 \le p \le 45$$



$$G(p) = U(p) - K(p)$$
$$= -p^3 + 4800p - 119000, \qquad 0 \le p \le 45$$



2.

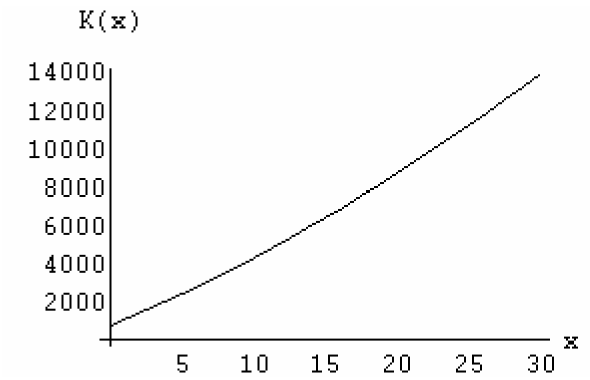
$$G'(p) = -3p^2 + 4800 := 0, \quad 0 < p < 45 \qquad \Rightarrow \qquad p = 40$$

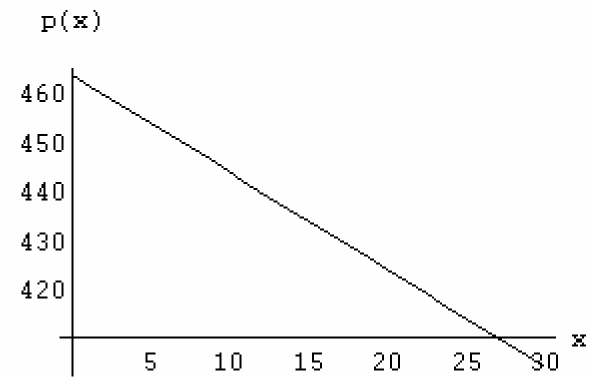
$$G''(p) = -6p < 0$$

Damit nimmt $G(p)$ in $p = 40$ ein relatives Maximum an mit $G(40) = 9000$ GE. Wegen $G(45) = 5875 < 9000$ handelt es sich gleichzeitig um das absolute Maximum.

3.
Aus 2. Folgt, daß $G(p)$ in $]0, \ 40[$ streng monoton wachsend und in $]40, \ 45[$ streng monoton fallend ist.

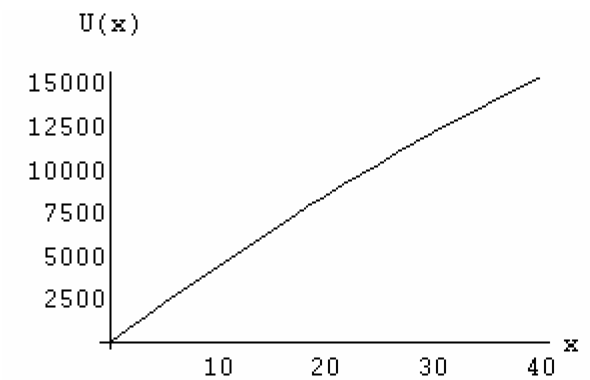
16.





1.

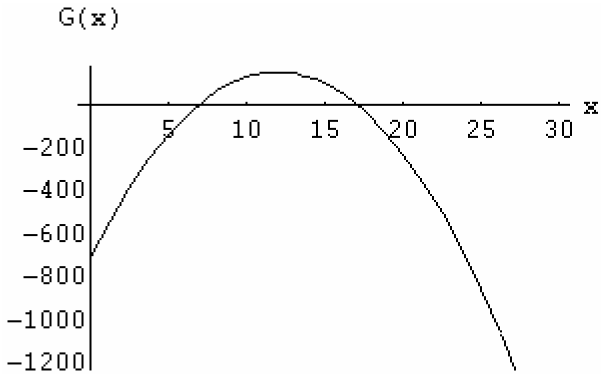
$$U(x) = p(x) \cdot x$$
$$= (464 - 2x)x$$



2.

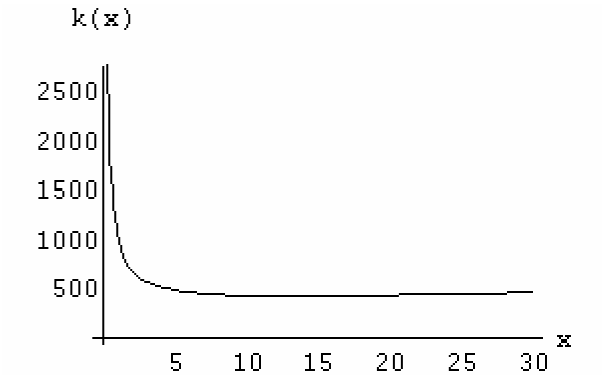
$$G(x) = U(x) - K(x)$$
$$= -6x^2 + 144x - 714$$

$$G(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x\text{-}7)(x\text{-}17) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7 < x < 17$$



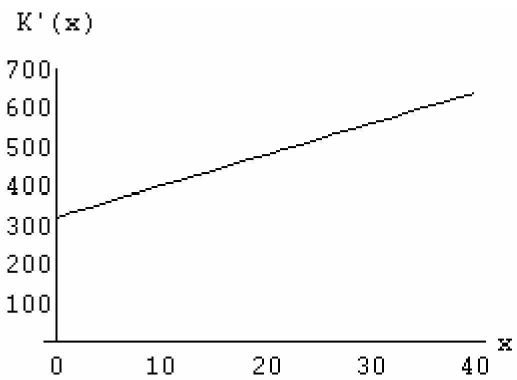
3.

$$k(x) := \frac{K(x)}{x}$$
$$= \frac{714}{x} + 320 + 4x, \quad x > 0$$



4.

$$K'(x) = 320 + 8x$$



5.

$$G'(x) := 0 \;\Rightarrow\; x = 12, \quad G''(x) = -12 < 0\,.$$

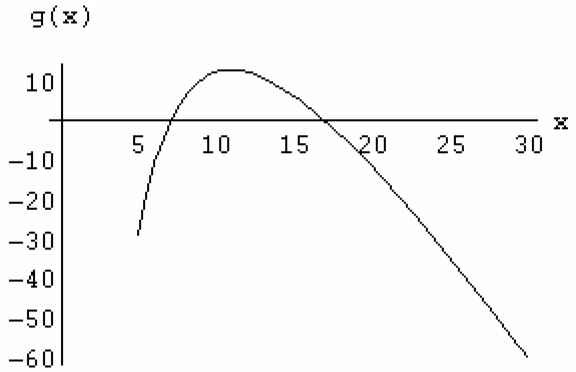
Damit nimmt die Gewinnfunktion in $x = 12$ den maximalen Wert $G(12) = 150$ GE an.

6.

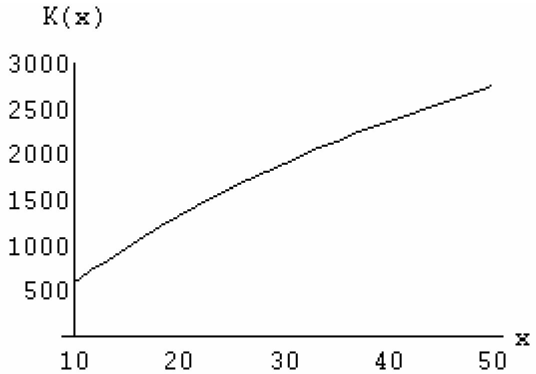
$$g(x) := \frac{G(x)}{x}$$
$$= -6x + 144 - \frac{714}{x}, \quad x > 0$$

$$g'(x) = -6 + \frac{714}{x^2} := 0, \quad x > 0 \Rightarrow \quad x = 10.91, \quad g''(x) = -1428 \cdot \frac{1}{x^3} < 0$$

Damit nimmt $g(x)$ in $x = 10.91$ ihren maximalen Wert an.



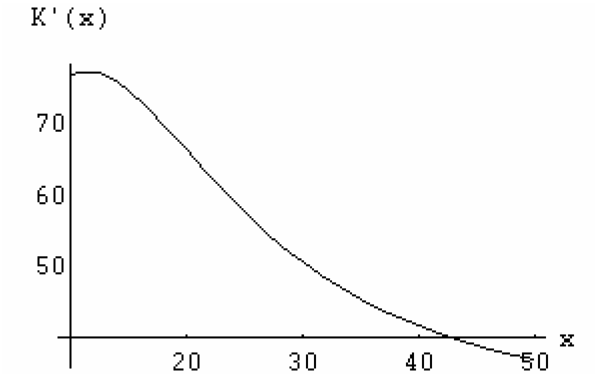
17.



1.

$$K'(x) = 30 + \frac{1160000x}{(400 + x^2)^2}, \quad 10 < x < 50$$
$$K'(20) = 66.25 \text{ GE}$$

Eine Erhöhung der Ausbringungsmenge um eine Einheit bewirkt eine Erhöhung der Kosten um etwa 66.25 GE.



2.

$$k(x) := \frac{K(x)}{x}$$

$$= 30 + \frac{1450x}{400+x^2}, \quad 10 \le x \le 50$$

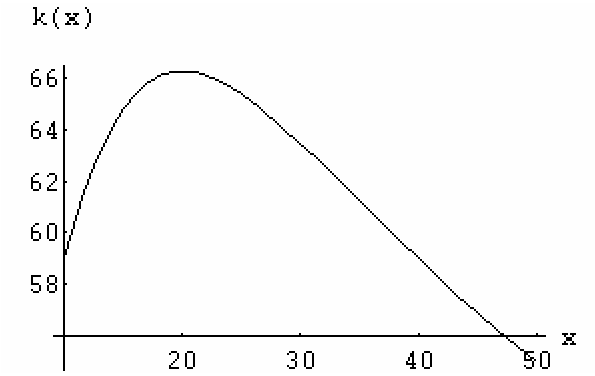
$$k'(x) = \frac{-1450x^2 + 580000}{(400+x^2)^2}, \quad 10 < x < 50$$

$$k'(x) := 0 \quad \Rightarrow \quad x = 20$$

$$k''(x) = \frac{-2900x \cdot (400+x^2) - 4x \cdot (580000 - 1450x^2)}{(400+x^2)^3}, \quad 10 < x < 50$$

$$k''(20) < 0$$

Damit nimmt $k(x)$ in $]10, \ 50[$ ein relatives Maximum aber kein relatives Minimum an.
Wegen $k(10) = 59, \ k(50) = 55$ nimmt $k(x)$ in $x = 50$ das absolute Minimum an.



3.
Wegen 2. ist $k(x)$ in $[10, \ 20]$ monoton wachsend und in $[20, \ 50]$ monoton fallend.

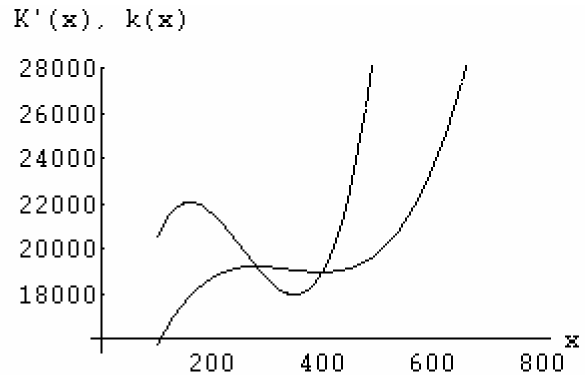
18.

$$K'(x) = 8400 + 10^{-4}(2016000x - 9180x^2 + 12x^3)$$

$$k(x) = 8400 + 10^{-4}(1008000x - 3060x^2 + 3x^3)$$

$$K'(x) < k(x)$$
$$\Leftrightarrow$$

$$8400+10^{-4}(2016000x-9180x^2+12x^3)<8400+10^{-4}(1008000x-3060x^2+3x^3)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x^3-680x^2+112000\text{x}<0 \;\Leftrightarrow\; 280<x<400$$



19.

$$k(x)=8400+10^{-4}(1008000x-3060x^2+3x^3)$$

1. Definitionsbereich

$D(k(x))=\left[100,\bar{x}\right]$; $\bar{x}$: Höchstkapazität des Unternehmens

Im Weiteren sei $\bar{x}=800$ angenommen.

2. Stetigkeit

$k(x)$ ist in D stetig.

3. *Schnittpunkte mit den Achsen*

a) mit der $x-$Achse

$$k(x):=0 \;\Rightarrow\; 8400+10^{-4}(1008000x-3060x^2+3x^3)=0$$

Es lässt sich (numerisch) zeigen, dass $k(x)$ keine Nullstellen hat. Dies ist auch ökonomisch plausibel, da Stückkosten immer entstehen.

b) mit der $y-$Achse

Wegen $x\ge 100$ gibt es keine Schnittstelle mit der $y-$Achse. Es wird eine Mindestproduktion von 100 Einheiten angenommen. Die zugehörigen Durchschnittskosten betragen dann $k(100)=15720.00>0$.

4. *Monotonie*

Es gilt

$$k'(x) = 10^{-4}(1008000 - 6120x + 9x^2)$$

$$k'(x) := 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 280, \qquad x_2 = 400$$

$$(x-280)\cdot(x-400) \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad k(x) \text{ ist monoton wachsend.}$$

Die Lösung der obigen Ungleichung ergibt:

$k(x)$ ist monoton wachsend für $\forall x \in]100, 280[\cup]400, 800[$
$k(x)$ ist monoton fallend für $\forall x \in]280, 400[$

5. *Extremwerte*

$$k''(x) = 10^{-4}(-6120x + 18x)\,; \qquad k''(280) = -0.108 < 0\,; \qquad k''(400) = 0.108 > 0$$

$k(x)$ nimmt also in $x = 280$ ein relatives Maximum an mit $k(280) = 19219.20$ und in $x = 400$ ein relatives Minimum an mit $k(400) = 18960.00$.
Wegen $k(100) = 15720.00$ und $k(800) = 46800.00$ nimmt $k(x)$ in $x = 100$ das absolute Minimum und in $x = 800$ das absolute Maximum an.
Der Betrieb hat also bei einer Produktion von 100 ME die geringsten Durchschnittskosten.

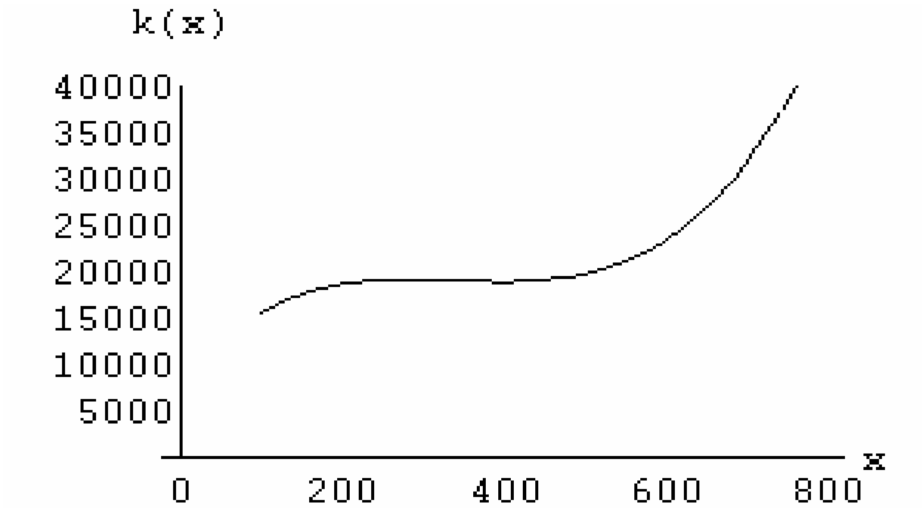
6. *Krümmungsverhalten*

Aus $k''(x) = 10^{-4}(-6120x + 18x) \geq 0$, d.h. $x \geq 340$, folgt:

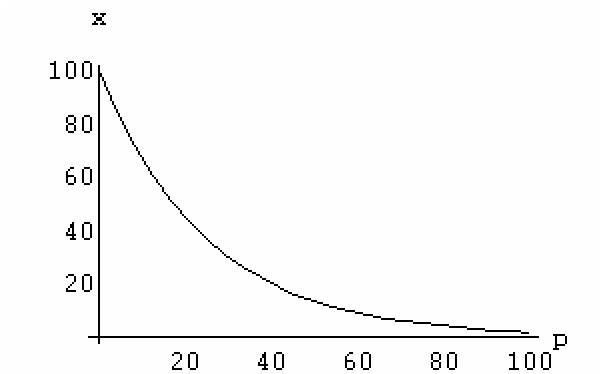
$k(x)$ ist konvex für $\forall x \in]340, 800[$
$k(x)$ ist konkav $\forall x \in]100, 340[$

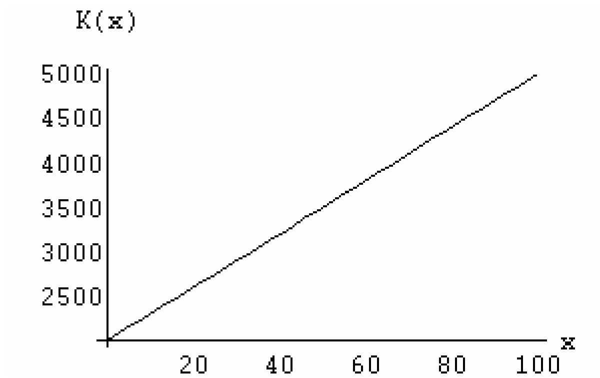
In $x = 340$ liegt also ein Wendepunkt vor.
Die Stückkosten wachsen also progressiv in $]340, 800[$ und degressive in $]100, 340[$.

7. *Graph der Funktion:*



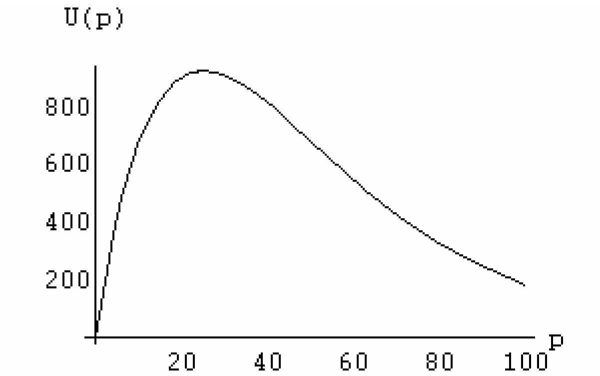
20.





1.

$$U(p) = x(p) \cdot p$$
$$= 100pe^{-0.04p}, \quad 0 \le p \le 100$$



$$G(p) = U(p) - K(p)$$
$$= 100\,pe^{-0.04p} - 2000 - 3000e^{-0.04p}, \quad 0 \le p \le 100$$

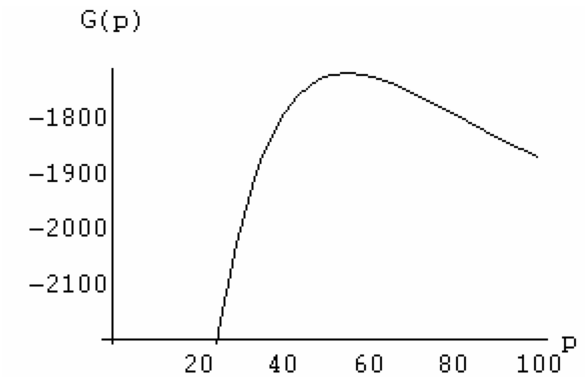
2.

$$G'(p) = e^{-0.04p}(220 - 4p), \quad 0 < p < 100$$

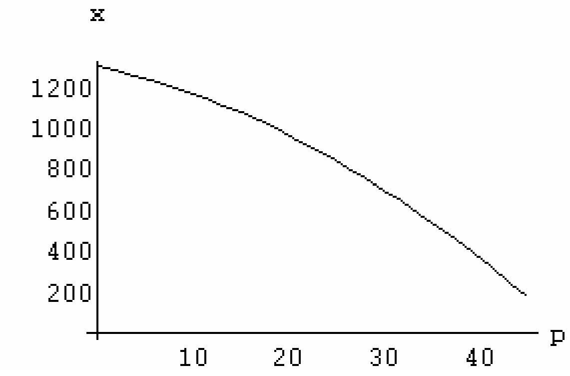
$$G'(p) := 0 \quad \Rightarrow \quad p = 55$$

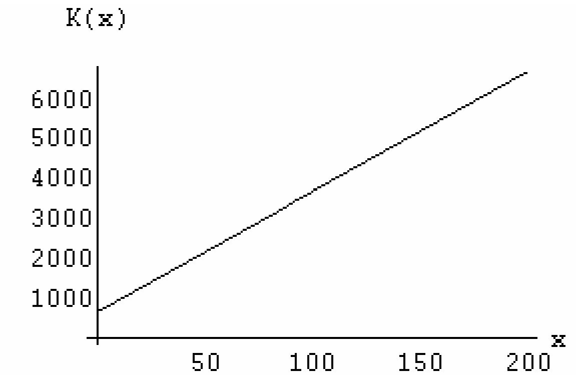
$$G''(p) = -0.04e^{-0.04p}(220 - 4p) - 4e^{-0.04p} \quad \Rightarrow \quad G''(p) < 0\,.$$

Wegen $G(100) < G(55)$ nimmt also $G(p)$ in $p = 55$ ihr absolutes Maximum an.



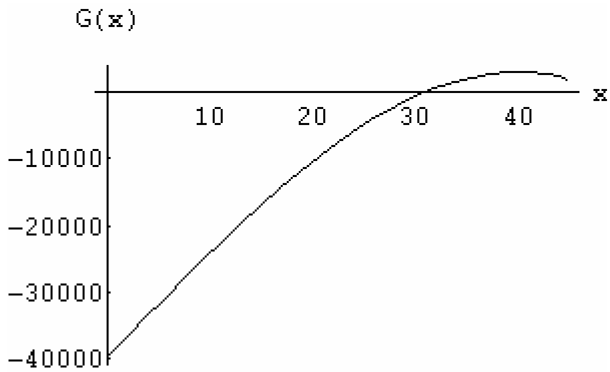
21.





1.

$$G(p)=\begin{cases}-\frac{1}{3}p^3+1600p-\frac{119000}{3} & \text{für} \quad p\in[0,\ 45]\\ -\frac{2000}{3} & \text{sonst}\end{cases}$$



2.

$$G'(p)=1600-p^2:=0$$

$$1600-p^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad p=40;\quad G''(p)=-2p<0 \quad \text{für } p=40.$$

Der Gewinn wird also maximal für $p=40$ GE mit $G(40)=3000$ GE.

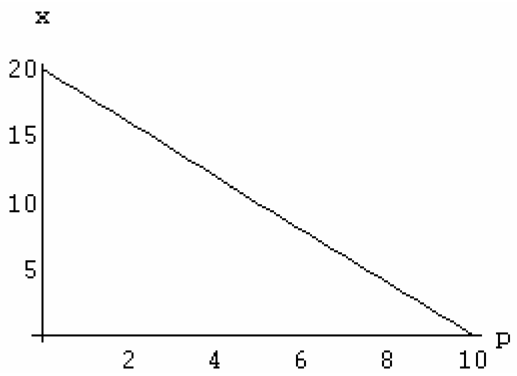
3.
<u>Zur Monotonie</u>:

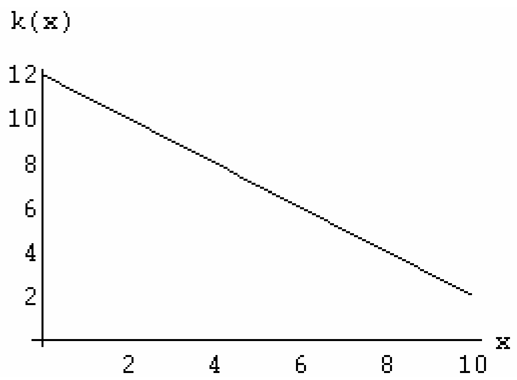
Wegen $G'(p) > 0$ für $p < 40, G'(p) < 0$ für $p > 40$ ist der Gewinn für $p \in [0, 40]$ streng monoton wachsend, für $p \in [40, 45]$ streng monoton fallend.

<u>Zum Krümmungsverhalten</u>:

Wegen $G''(p) = -2p < 0$ für $p \in [0, 45]$ ist p für alle $p \in [0, 45]$ streng konkav, d.h. der Grenzgewinn ist in diesem Bereich streng monoton fallend.

22.





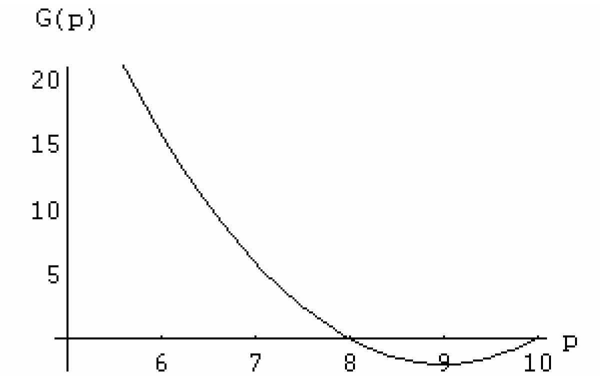
1.
Maximalabsatz: $x = 20$ für $p = 0$
Kosten: $K(20) = 20 \cdot k(20) = 40$
Minimalabsatz: $x = 0$ für $p \geq 10$ für $K(0) = 0$.

2.
$$x = -2p + 20 \leq 10 \quad \Rightarrow \quad p \geq 5.$$

3.
$$p \in [0,\ 10[\ \Rightarrow \ x]0,\ 20]$$
$$G(p) = x \cdot p - x \cdot k(x)$$

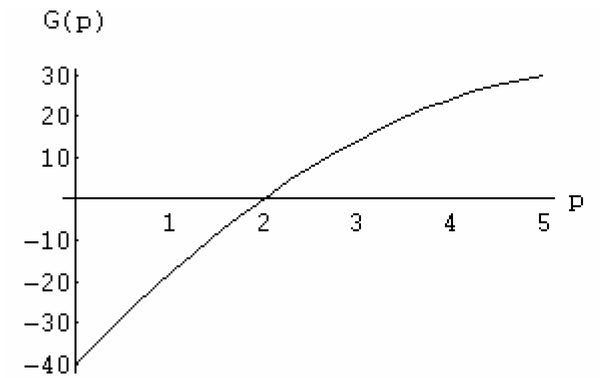
$$= (-2p+20)\cdot p - (-2p+20)\cdot(2p-20+12)$$

$$= 2p^2 - 36p + 160\,, \quad \text{für} \quad p \in [5, 10[\,;$$



$$G(p) = -2p^2 + 20p - (-2p+20)\cdot 2$$

$$= -2p^2 + 20p - 40 \quad \text{für} \quad p \in [0, 5[\,.$$



Zusammenfassend:

$$G(p) = \begin{cases} 2p^2 - 36p + 160 & \text{für} \quad p \in [5,10[\\ -2p^2 + 24p - 40 & \text{für} \quad p \in [0,5[\end{cases}$$

4.

$$G'(p) = 4p - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = 9\,; \qquad G''(p) = 4 > 0\,.$$

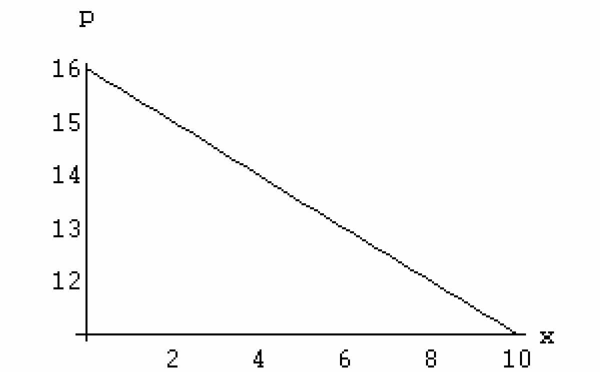
Der Preis $p = 9$ beschreibt ein relatives Gewinnminimum. Andererseits gilt für $p \in \left]0,\ 5\right[$:
$G'(p) = -4p + 24 > 0$.
Die Funktion wächst streng monoton für $p \in [0, 5]$.
Für ein Gewinnmaximum kommen die Werte $p = 5,\ p = 10$ in Frage:

$G(5) = 30, \quad G(10) = 0$.

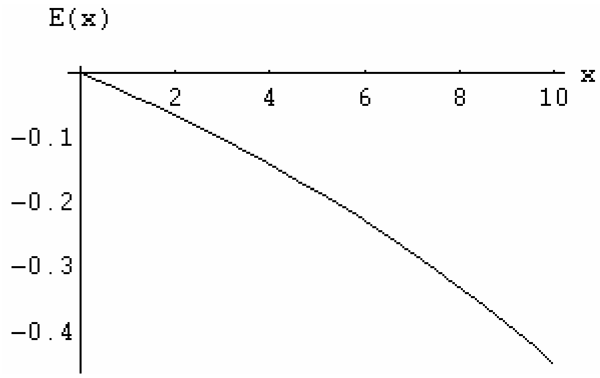
Der gewinnmaximale Preis ist $p = 5$ und das Gewinnmaximum $G(5) = 30$.

23.

1.



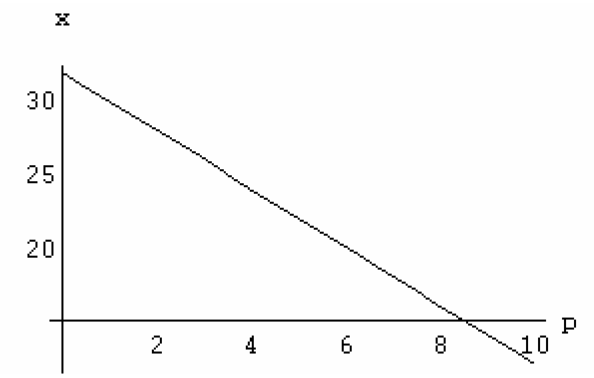
$$\varepsilon_{p,x}(x) = \frac{-0.5x}{16 - 0.5x}$$



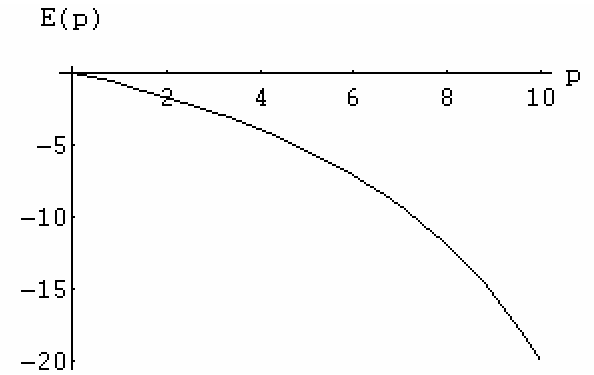
$$\varepsilon_{p,x}(8) = -\frac{1}{3}.$$

2.

$$p(x) = 16 - 0.5x \quad \Rightarrow \quad x(p) = 32 - 2p$$



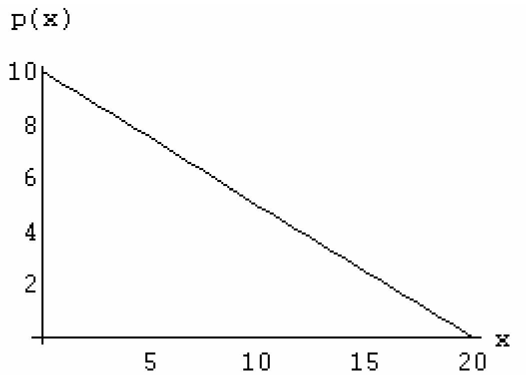
$$\varepsilon_{x,p}(p) = \frac{-2p}{32-2p}$$

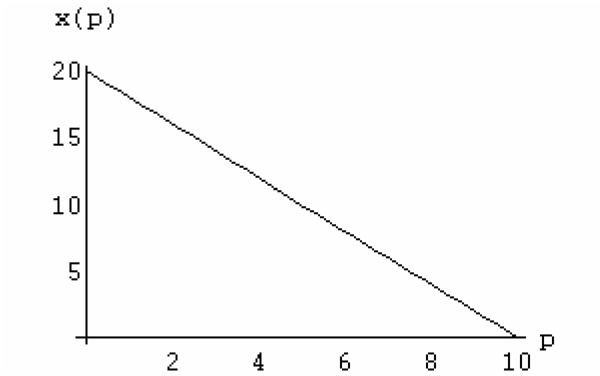


$$p(8) = 12$$
$$\varepsilon_{x,p}(12) = -3$$

24.

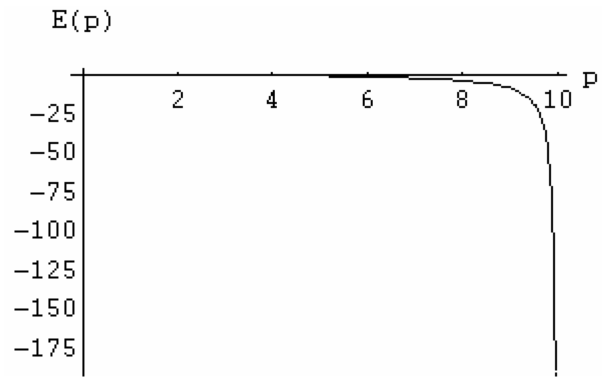
$$p(x) = 10 - 0.5x \quad \Rightarrow \quad x(p) = 20 - 2p$$



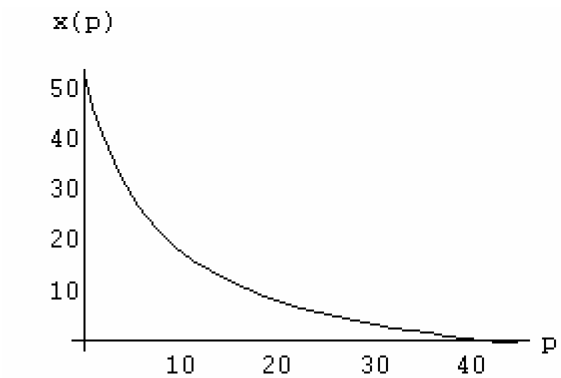


$$\varepsilon_{x,p}(p) = \frac{-2p}{20-2p}$$

$$\varepsilon_{x,p}(6) = -\frac{3}{2}$$

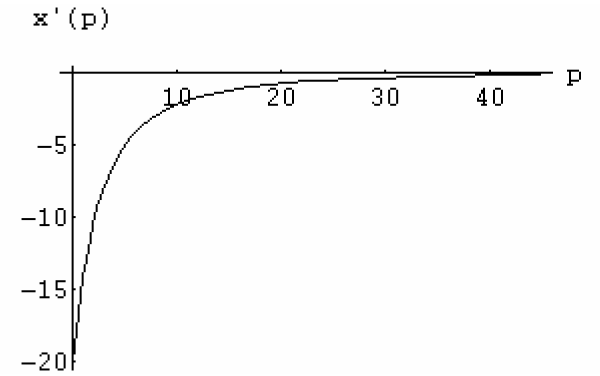


25.



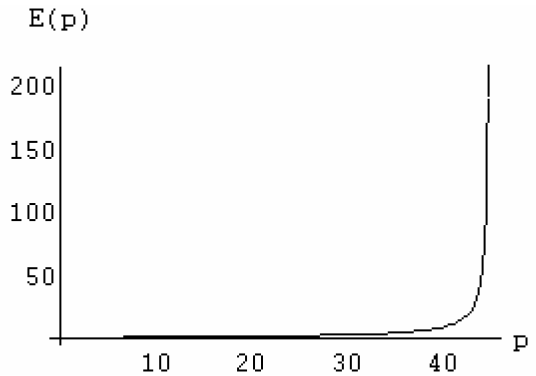
1.

$$x^{'}(p) = \frac{-500}{(p+5)^2}$$



2.

$$\varepsilon_{x,p}(p)=\frac{\frac{500p}{(p+5)^2}}{\frac{500}{p+5}-10}=-\frac{50p}{(5+p)(45-p)}$$



3.

$$10=\frac{500}{p+5}-10 \quad \Rightarrow \quad p=20$$

$$40=\frac{500}{p+5}-10 \quad \Rightarrow \quad p=5$$

$$\varepsilon_{x,p}(20)=-1.6, \qquad \varepsilon_{x,p}(5)=-0.625$$

4.

$$\frac{-50p}{(5+p)(45-p)}=-3 \qquad \Rightarrow \quad 3p^2-70p-675=0 \quad \Rightarrow \quad p=30.67 \text{ GE}$$

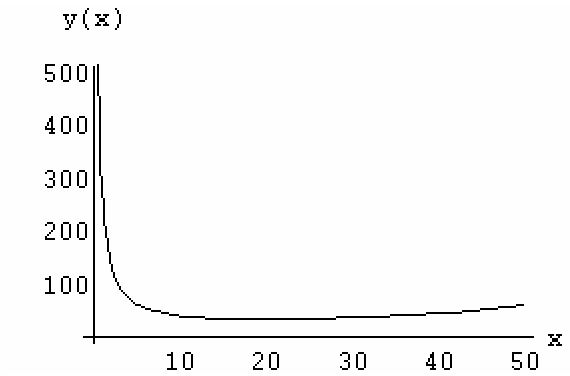
$$x(30.67)\approx 4.02 \text{ ME}$$

5.

$$\frac{-50p}{(5+p)(45-p)}=-1 \quad \Rightarrow \quad p^2+10p-225=0 \quad \Rightarrow \quad p\approx 10.81\,\text{GE}$$

d.h. die Nachfragefunktion ist elastisch für $p > 10.81$ und unelasisch für $p < 10.81\,\text{GE}$.

26.



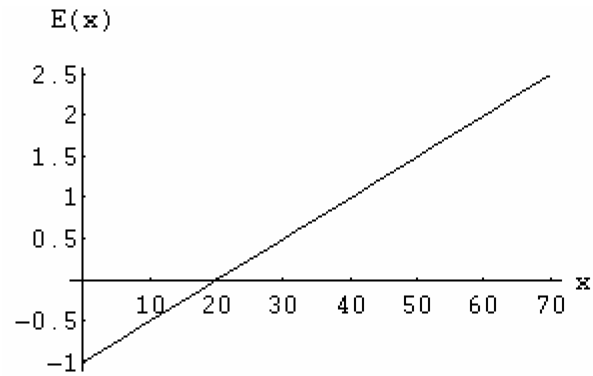
1.

$$\varepsilon_{y,x}(x) = \frac{225 \cdot \dfrac{0.05xe^{0.05x+0.08} - e^{0.05x+0.08}}{x^2}}{225 \cdot \dfrac{e^{0.05x+0.08}}{x}} \cdot x \qquad\qquad x > 0$$

$$= 0.05x - 1$$

$$\varepsilon_{y,x}(60) = 2$$

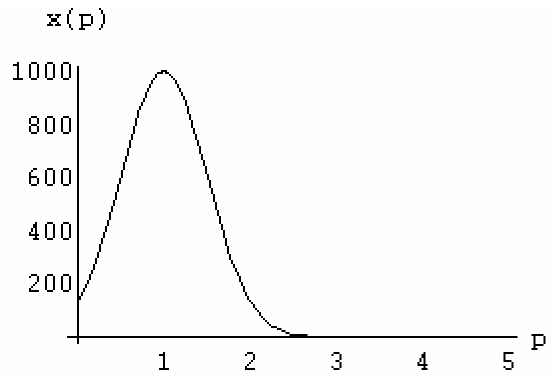
Ausgehend von $x = 20$ erhöht sich y näherungsweise um etwa 2%, wenn x um 1% erhöht wird.



2.

$$-1 < 0.05x - 1 < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 40$$

27.



1.

$$f'(p) = 1000(-4(p-1))e^{-2(p-1)^2}$$

$$f'(p) > 0 \;\Leftrightarrow\; -4(p-1) > 0 \;\Leftrightarrow\; p \in]0,\ 1[$$

$$f'(p) < 0 \quad \Leftrightarrow\; p \in]1,\ 5[$$

Damit ist f für $p \in]0,\ 1[$ streng monoton wachsend und für $p \in]1,\ 5[$ streng monoton fallend.

$$f''(p) = 1000(-4)e^{-2(p-1)^2} + 1000(-4(p-1))^2 e^{-2(p-1)^2}$$

$$f''(p) > 0 \;\Leftrightarrow\; -4 + 16(p-1)^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; (p-1)^2 > \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\; p \in \left]0,\ \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2},\ 5\right[$$

$$f''(p) < 0 \quad \Leftrightarrow\; p \in \left]\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right[.$$

Damit ist f streng konvex für $p \in \left]0,\ \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2},\ 5\right[$ und streng konkav für $p \in \left]\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right[$.

2.
Aus dem Monotonieverhalten der Funktion folgt:

$p = 1$ ist Maximalstelle mit $f(1) = 1000$.

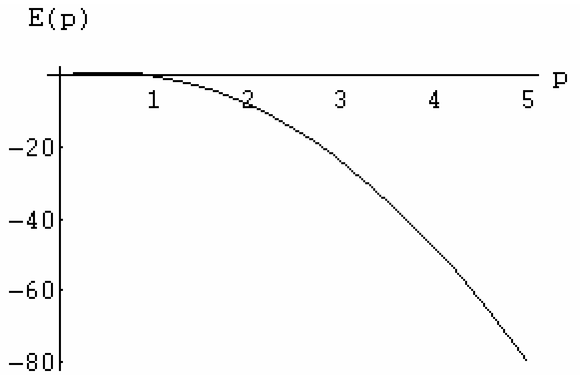
Ferner ist wegen

$$f(0) = 1000e^{-2}, \qquad f(5) = 1000e^{-32}$$

$p = 5$ Minimalstelle von f.

3.

$$\varepsilon_f(p) = \frac{f'(p)}{f(p)} \cdot p = -4p(p-1)$$



$$-4p(p-1) = 1 \iff 4p^2 - 4p + 1 = 0 \iff p = \frac{1}{2}$$

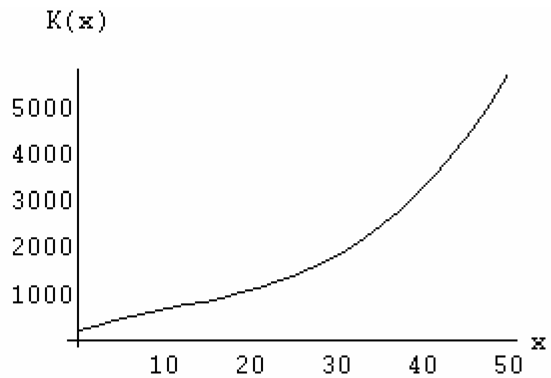
$$-4p(p-1) = -1 \iff 4p^2 - 4p - 1 = 0 \iff p = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Daraus folgt mit $\varepsilon_f(0) = \varepsilon_f(1) = 0$:

$$\left|\varepsilon_f(p)\right| < 1 \text{ für } p \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right[$$

Die Nachfrage reagiert auf Preise aus $\left]\frac{1+\sqrt{2}}{2}, 5\right[$ elastisch und auf Preise aus $\left]0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right[$ unelastisch.

28.



1.

$$dK(x) = K'(x) \cdot dx$$

$$K'(x) = 0.18x^2 - 4x + 60$$

i) $dK(x=10, dx=2) = 76$ GE

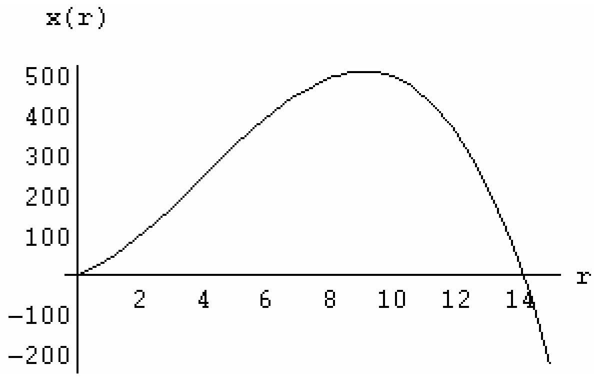
ii) $dK(x=10, dx=-1) = -38$ GE

2.

i) $\Delta K = K(12) - K(10) = 75.68$ GE

ii) $\Delta K = K(9) - K(10) = -38.26$ GE

29.



$dx = x'(r).dr$

$x'(r) = -3r^2 + 24r + 30 \qquad \Rightarrow \qquad x'(11) = -69$

$dr = 0.25$

$dx(r=11, dr=0.25) = -17.25\, ME_x$

30.

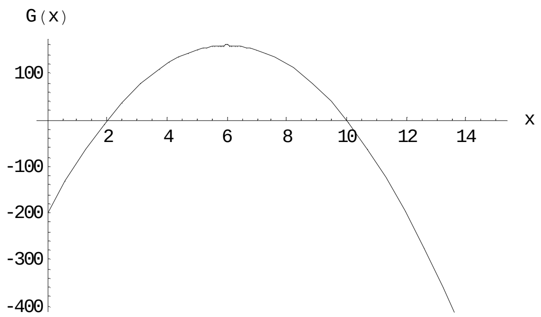
1.

$$G(x) = -10x^2 + 120x - 200$$

$$-10x^2 + 120x - 200 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 10$$

Wegen $G''(x) = -20 < 0$ ist $G(x)$ konkav. Damit gilt $G(x) > 0$ in

$$2 < x < 10.$$



2.

$$G'(x) = -20x + 120,$$

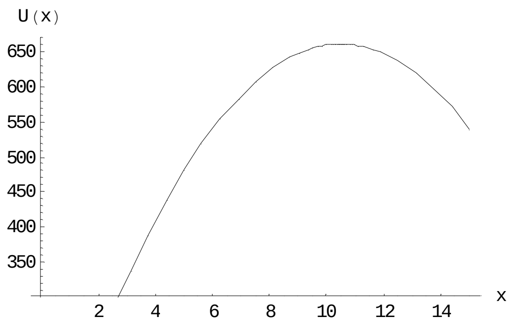
$$G'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -20x + 120 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6.$$

Wegen $G''(x) = -20 < 0$ nimmt $G(x)$ ihr Maximum in $x = 6$. Es gilt dabei $G(6) = 160$.

3.

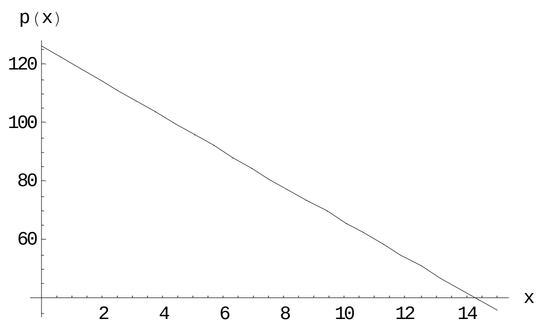
$$U(x) = G(x) + K(x)$$

$$= -6x^2 + 126x.$$



4.

$$p(x) = \frac{U(x)}{x}$$
$$= -6x + 126.$$



5.

$$\varepsilon_{K,x}(x) = \frac{x}{4x^2+6x+200} \cdot (8x+6)$$

$$\varepsilon_{K,x}(5) \approx 0.70\,\%$$

6.
i)

$$dx_0 = 0.5, \quad x_0 = 4\,,$$

$$dG(x,dx) = G'(x)\cdot dx\,, \qquad dG(4,0.5) = G'(4)\cdot 0.5 = 20\,,$$

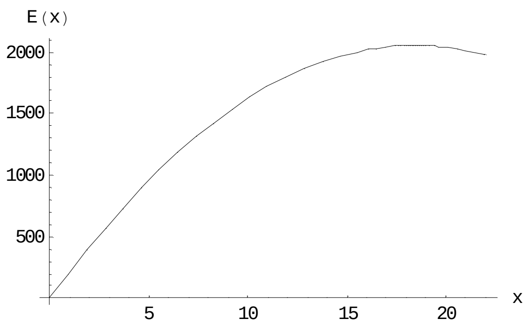
ii)

$$G(4.5) - G(4.0) = 137.5 - 120.5 = 17.5\,.$$

31.
1.

$$E(x) = p(x)\cdot x$$

$$= 222x - 6x^2$$



2.

$$E'(x) = 222 - 12x\,,$$

$$E'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 222 - 12x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 18.5\,.$$

Das heißt $E(x)$ ist streng monoton wachsend für $0 < x < 18.5$ und streng monoton fallend für $x > 18.5$.

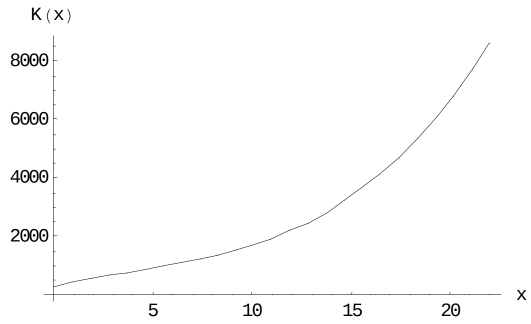
3.
1.

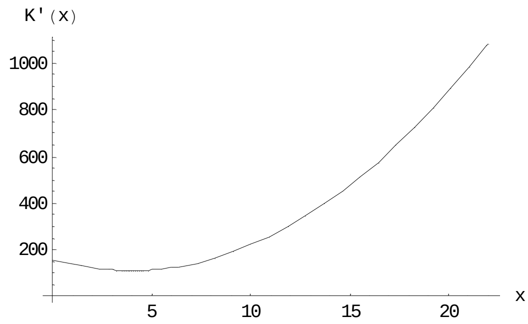
$$K(x) = 293 + 159x - 12x^2 + x^3$$

Zur Monotonie:

$$K'(x) = 159 - 24x + 3x^2 .$$

Die Gleichung $159 - 24x + 3x^2 = 0$ hat keine reellen Lösungen.





Damit ist die Funktion $K(x)$ monoton. Es genügt, die Funktionswerte für zwei verschieden $x-$Werte miteinander zu vergleichen, z. B. für $x=1$ und $x=2$:

$$K(1) = 441 < 571 = K(2) \quad ,$$

d.h., $K(x)$ ist monoton wachsend.

Zum Krümmungsverhalten:

$$K''(x) = -24 + 6x$$

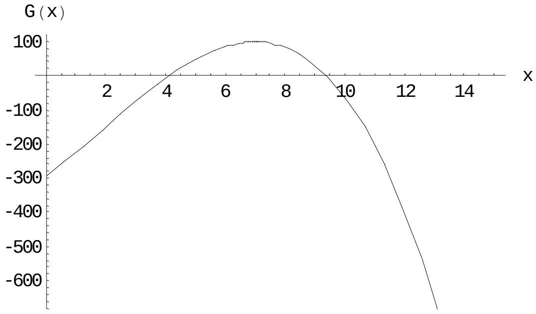
$$K''(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -24 + 6x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 4 \quad .$$

Damit ist $K(x)$ streng konkav für $x < 4$ und streng konvex für $x > 4$. An der Stelle $x = 4$ liegt ein Wendepunkt vor.

4.

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

$$= -x^3 + 6x^2 + 63x - 293$$



$$G'(x) = -3x^2 + 12x + 63,$$

$$-3x^2 + 12x + 63 = 0 \ \wedge \ x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x = 7.$$

Wegen $G''(x) = -6x + 12, \quad G''(7) < 0$ ist der Gewinn maximal für $x = 7$. Der maximale Gewinn lautet: $G(7) = 99$ GE.

5.

$$\varepsilon_{p,x}(x) = \frac{x}{p(x)} \cdot p'(x) = -1,$$

$$\frac{x}{222 - 6x} \cdot (-6) = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 18.5, \qquad\qquad p(18.5) = 111 \text{ GE}.$$

6.
i)

$$K'(40) = 3999.$$

ii)

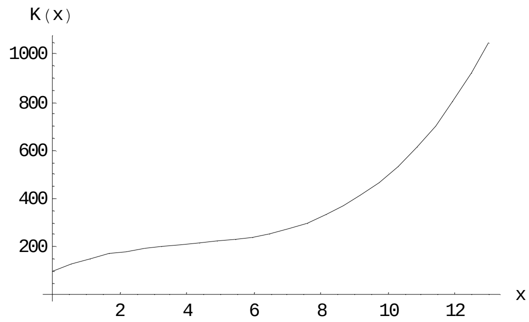
$$K(41) - K(40) = 55561 - 51453 = 4108.$$

32.
1.
Wegen

$$K'(x) = 3x^2 - 24x + 60 \neq 0; \quad x \in]0; 13[$$

hat die Funktion $K(x)$ keine Extremwerte in $]0;\ 13[$. Andererseits ist $K(x)$ wegen

$K(0) = 98 < 147 = K(1)$ monoton wachsend.



2.

$$K^{'}(x) = 3x^2 - 24x + 60;$$

$$K^{'}(7) = 39$$

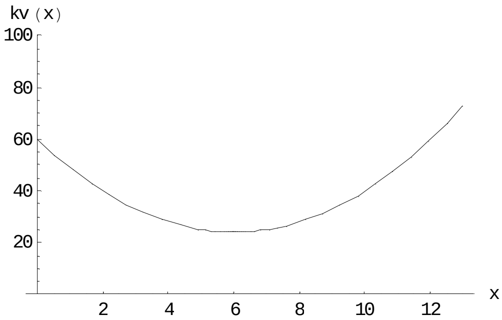
Ausgehend von einem Produktionsniveau von 7 ME, erhöht sich die Produktion um eine ME, so erhöhen sich die Gesamtkosten um etwa 39 GE.

3.

$$k_v(x) := \frac{K_v(x)}{x} = x^2 - 12x + 60$$

$$k_v^{'}(x) = 2x - 12 := 0, \quad x = 6.$$

Wegen $k_v^{''}(x) = 2 > 0$ nimmt die Stückvariablenfunktion ihr Minimum an der Stelle 6.

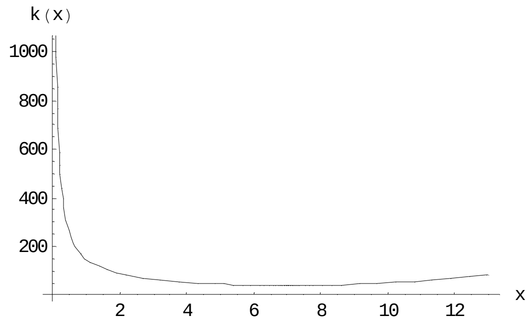


4.

$$k_v(x) := \frac{K\ (x)}{x} = x^2 - 12x + 60 + \frac{98}{x}$$

$$k_v^{'}(x) = 2x - 12 - \frac{98}{x^2} := 0, \quad x = 7 \text{ (erraten!)}$$

Wegen $k_v^{''}(x) = 2 + \dfrac{196}{x^3} > 0$ nimmt die Stückkostenfunktion ihr Minimum in $x = 7$ an.



5.
i)

$$K(10) - K(13) = -549$$

ii)

$$dK(x, dx) = K^{'}(x).dx\,,$$

$$dK(13,-3) = K^{'}(13)..(-3) = -765$$

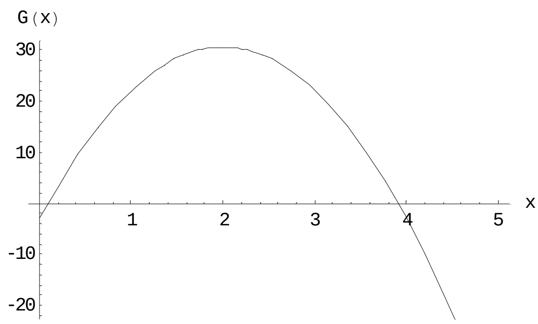
33.
1.

$$G'(x) = -16.8x + 33.6$$

$$G'(x) = 0, \quad \Rightarrow -16.8x + 33.6 = 0\,, \text{ d.h. } x = 2$$

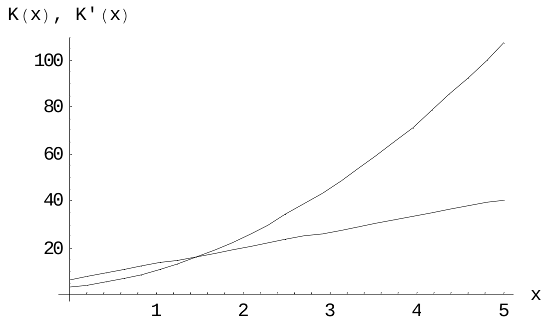
$$G^{''}(x) = -16.86 < 0\,.$$

Damit wird der maximale Gewinn für $x = 2$ ME erzielt.



$$K'(x) = 6.8x + 6.4$$

$$K'(2) = 20\,.$$

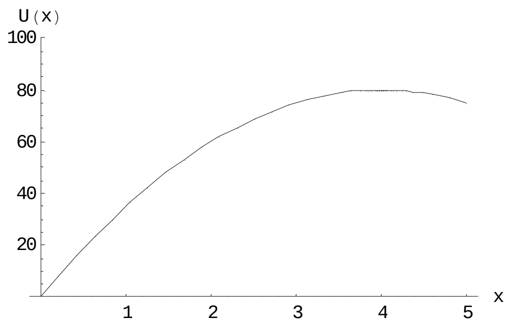


Wird die Produktionsmenge von 2 ME auf eine weitere Einheit erhöht, so erhöhen sich die Kosten näherungsweise um 20 GE.

2.

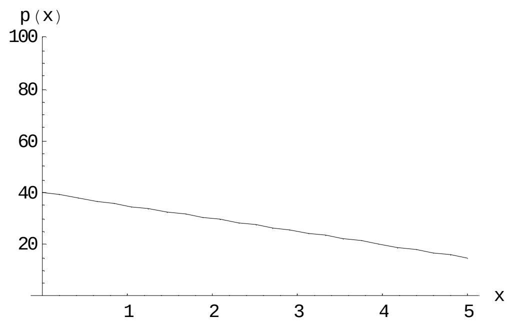
$$U(x) = G(x) + K(x)$$

$$U(x) = -5x^2 + 40x$$



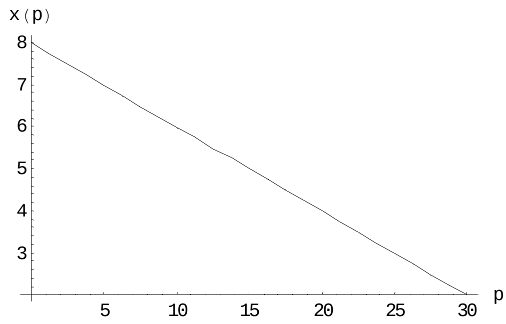
$$p(x) = \frac{U(x)}{p(x)}$$

$$p(x) = -5x + 40\,.$$



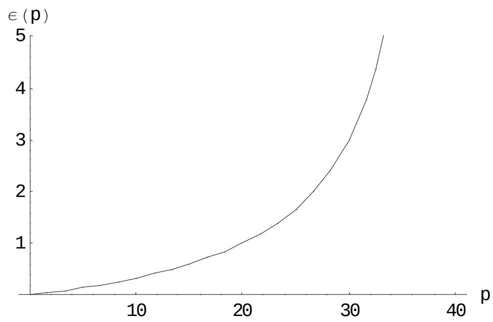
3.

$$p(x) = -5x + 40 \quad \Rightarrow \quad x(p) = 8 - \frac{1}{5}p$$



$$\varepsilon_{x,p}(p) = \frac{-\frac{1}{5}p}{8-\frac{1}{5}p} = -\frac{p}{40-p}$$

$$-1 < p < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < -\frac{p}{40-p} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < p < 20$$



4.

i)

$$\varepsilon_{K,x}(x) = \frac{x \cdot \left(6.8x + 6.4\right)}{3.4x^2 + 6.4x + 3}$$

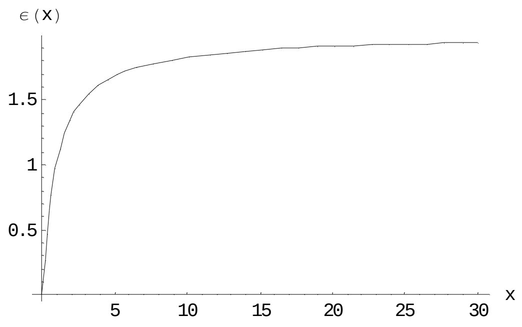
$$\varepsilon_{K,x}(5) \approx 1.683.$$

ii)

$$K(5 \cdot 0.99) = K(4.95) = 117.99, \qquad K(5) = 120.00,$$

$$100 - \frac{117.99}{120} \cdot 100 = 1.675\%,$$

Damit haben sich die Kosten um 1.675 % verringert.



34.

1.

$$K'(x) = 0.18x^2 - 2x + 50\,, \quad K'(70) = 792\,\text{GE}$$

Erhöht sich die Produktion, ausgehend von 70 ME, um eine Einheit, so erhöhen sich die Kosten um etwa 792 GE.

2.

$$E(x) = p(x)\cdot x = 150x - 0.4x^2\,, \qquad E'(x) = 150 - 0.8x$$

$$K'(x) = E'(x) \quad \Rightarrow \quad 0.18x^2 - 2x + 50 = 150 - 0.8x$$

$$(\,0.18x^2 - 1.2x - 100 = 0 \quad \wedge \quad x \geq 0\,) \Rightarrow \quad x \approx 27.14$$

3.

$$x'(r) = -\frac{1}{20}r^2 + \frac{5}{2}r + 3\,, \qquad x'(40) = -\frac{1}{20}\cdot 40^2 + \frac{5}{2}\cdot 40 + 3 = 23\,.$$

Erhöht sich die Inputmenge, ausgehend von 40 ME, um eine Einheit, so erhöht sich die Produktion um etwa 23 ME.

4.

$$\begin{aligned} G(x) &= E(x) - K(x) \\ &= 150x - 0.4x^2 - 0.06x^3 + x^2 - 50x - 400 \end{aligned}$$

$$G(x) = -0.06x^3 + 0.6x^2 + 100x - 400\,.$$

5.

$$\varepsilon_{G,x}(x) = \frac{x}{-0.06x^3 + 0.6x^2 + 100x - 400}\cdot(-0.18x^2 + 1.2x + 100)$$

$$\varepsilon_{G,x}(70) = \frac{70}{-11040}\cdot(-698) \approx 4.43$$

Erhöht sich die Produktion, ausgehend von 70 ME, um 1%, so erhöht sich der Gewinn um etwa 4.43%.

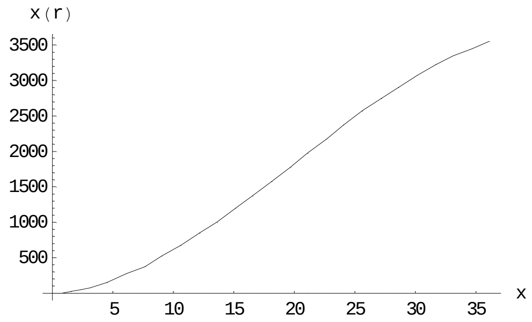
6.

a) $\frac{dG}{dx} = G^{'}(x)$; $dG(x,dx) = G^{'}(x) \cdot dx = \left(-0.18x^2 + 1.2x + 100\right) \cdot dx$;

$$dG(70,\ -3) = \left(-0.18 \cdot 70^2 + 1.2 \cdot 70 + 100\right) \cdot \left(-3\right) = 2094$$

b) $G(67) - G(70) = -9052.38 - (-11040) = 1987.62$ €

35.



1.

$$-0.1r^3 + 6r^2 + 12.3r = 0,$$

$$r \cdot \left(-0.1r^2 + 6r + 12.3\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 0, \quad r_2 \approx -1.98, \quad r_3 \approx 61.98.$$

wegen $r_2, r_3 \notin [0,\ 38]$ ist $r = 0$ die einzige Nullstelle der Produktionsfunktion.

2.

$$x'(r) = -0.3r^2 + 12r + 12.3\ ,$$

$$x'(r) = 0 \ \Rightarrow\ r_1 = -1, \quad r_2 = 41.$$

Wegen $r_1, r_2 \notin [0,\ 38]$ gibt es in $[0,\ 38]$ keine relativen Extremwerte. Wegen $x\left(0\right) = 0$ und $x\left(36\right) = 3553.20$ wird für $x = 36$ einen absoluten maximalen Gewinn von 3553.20 € erzielt.

3.

$$x'(10) = 102.3.$$

Erhöht man den Input von 10 auf 11 Mengeneinheiten, so erhöht sich die Produktion näherungsweise um 102.3 €.

4.

$$x'(r) = -0.3r^2 + 12r + 12.3$$

$$x''(r) = -0.6r^2 + 12\,,$$

$$x''(r) > 0 \quad \Rightarrow \quad -0.6r^2 + 12 > 0, \quad r < 20\,.$$

Damit ist die Funktion $x(r)$ in $\left]0,\ 20\right[$ konvex (die Produktion wächst progressiv) und in $\left]20,\ 36\right[$ konkav (die Produktion wächst gebremst). Der Punkt $(20;\ 1846)$ ist ein Wendepunkt der Produktionsfunktion.

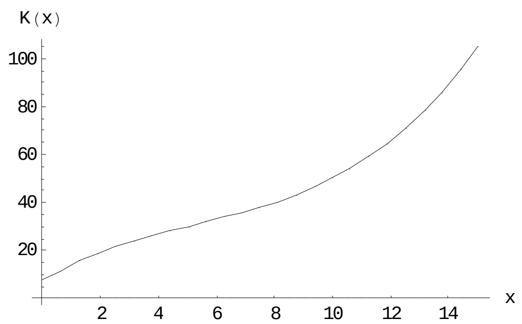
5.

$$\varepsilon_{x,r}(r) = \frac{r}{-0.1r^3 + 6r^2 + 12.3r} \cdot \left(-0.3r^2 + 12r + 12.3\right)$$

$$\varepsilon_{x,r}(10) \approx 1.64.$$

Erhöht man den Input ausgehend von 10 ME um 1%, so erhöht sich die Produktion um etwa 1.64%. Damit ist die Produktionsfunktion an der Stelle $r = 10$ elastisch.

36.



1.

$$K'(x) = 0.15x^2 - 1.6x + 7.25\,,$$

$$K''(x) = 0.30x - 1.6$$

$$K''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 5.33\,.$$

Damit ist die Funktion $K(x)$ in $\left]0,\ 5.33\right[$ konkav (die Kosten wachsen gebremst) und in $\left]5.33,\ +\infty\right[$ konvex (die Kosten wachsen progressiv). Der Punkt $(5.33;\ 30.99)$ ist ein Wendepunkt der Kostenfunktion.

2.

Die Gleichung $0.15x^2 - 1.6x + 7.25 = 0$ hat keine reellen Lösungen. Damit ist die Funktion $K(x)$ monoton. Wegen $K(1) = 14 < 19.2 = K(2)$ ist die Kostenfunktion streng monoton wachsend.

3.

$$U(x) = x \cdot p(x)$$

$$= 15x - x^2 .$$

$$G(x) = U(x) - K(x)$$

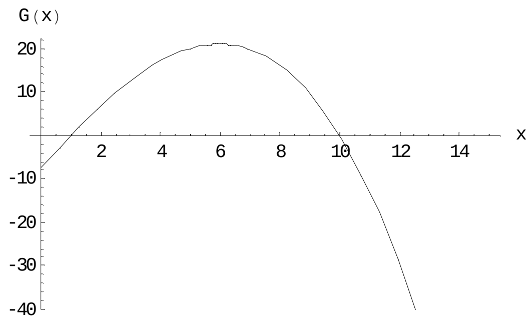
$$= -0.05x^3 - 0.2x^2 + 7.75x - 7.5 .$$

$$G'(x) = -0.15x^2 - 0.4x + 7.75 .$$

$$G''(x) = -0.30x - 0.4$$

$$\left(-0.15x^2 - 0.4x + 7.75 = 0 \;\wedge\; x \geq 0\right) \quad \Rightarrow \quad x \approx 5.97 .$$

Wegen $G''(5.97) < 0$ ist der Gewinn für $x \approx 5.97$ maximal. Der maximale Gewinn beträgt $G(5.97) \approx 21$€.



4.

$$G'(4) = 3.75 .$$

Erhöht man die Produktion von 4 ME auf 5 ME, so erhöhen sich die Kosten um etwa 3.25 €.

5.

$$\varepsilon_{K,x}(r) = \frac{x}{-0.05x^3 - 0.2x^2 + 7.75x - 7.5} \cdot \left(-0.15x^2 - 0.4x + 7.75\right)$$

$$\varepsilon_{K,x}(4) \approx 0.89.$$

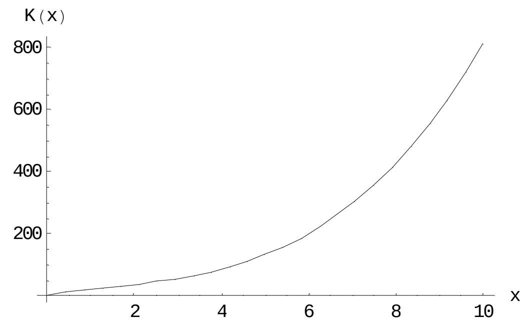
Erhöht man die Produktion ausgehend von 4 ME um 1%, so erhöht sich der Gewinn um etwa 0.89%. Damit ist die Gewinnfunktion an der Stelle $x = 4$ unelastisch.

37.
1.

$$K'(x) = 3x^2 - 8x + 21$$

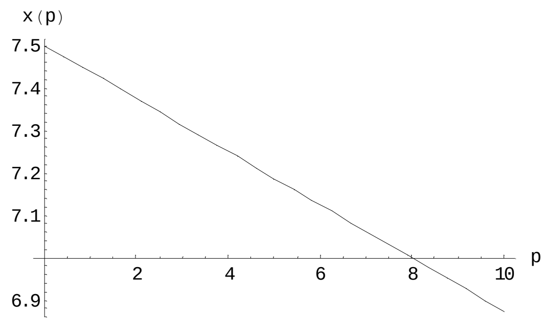
$$\left(3x^2 - 8x + 21 = 0 \ \wedge \ x \in R_+\right) \ \Rightarrow \ x \in \varnothing .$$

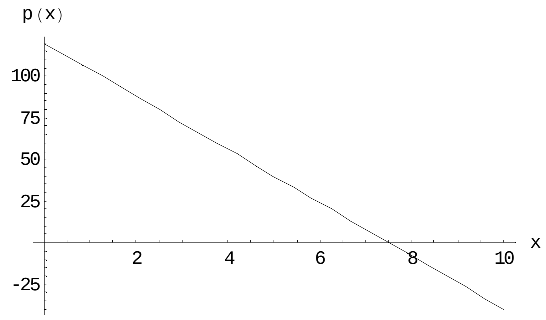
D. h. die Funktion $K(x)$ hat keine relativen Extrema. Wegen $K(1) = 21 < 37 = K(2)$ ist die Kostenfunktion streng monoton wachsend:



2.

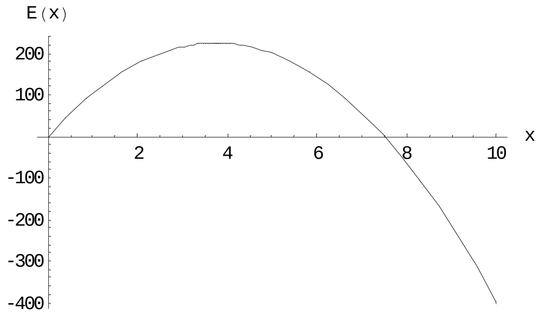
$$x(p) = \frac{15}{2} - \frac{1}{16} p \quad \Rightarrow \quad p(x) = 120 - 16x.$$





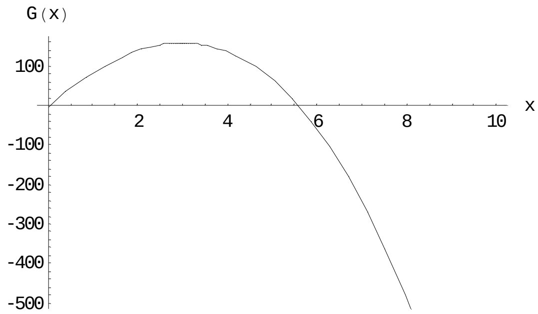
$E(x) = x.p(x)$

$= 120x - 16x^2.$



$G(x) = E(x) - K(x)$

$= -x^3 - 12x^2 + 99x - 3.$



$G'(x) = -3x^2 - 24x + 99$,

$\left(-3x^2 - 24x + 99 = 0 \ \wedge \ x \geq 0\right) \quad \Rightarrow \quad x = 3,$

$G''(x) = -6x - 24$.

Wegen $G''(3) < 0$ ist der Gewinn maximal für $x = 3.$ Der maximale Gewinn beträgt $G(3) = 159$ GE.

3.

$K'(4) = 37$ GE.

Erhöht sich die Produktion von 4 ME auf 5 ME, so erhöhen sich die Kosten um etwa 37 GE.

4.

$$\varepsilon_{G,x}(x) = \frac{x}{-x^3 - 12x^2 + 99x - 3} \cdot \left(-3x^2 - 24x + 99\right),$$

$$\varepsilon_{G,x}(4) \approx -1.31.$$

Erhöht man die Produktion von 4 ME um 1%, so reduziert sich die Produktion um etwa 1.31%. Damit ist die Gewinnfunktion an der Stelle $x = 4$ elastisch.

(Letzte Aktualisierung: 03.11.09)